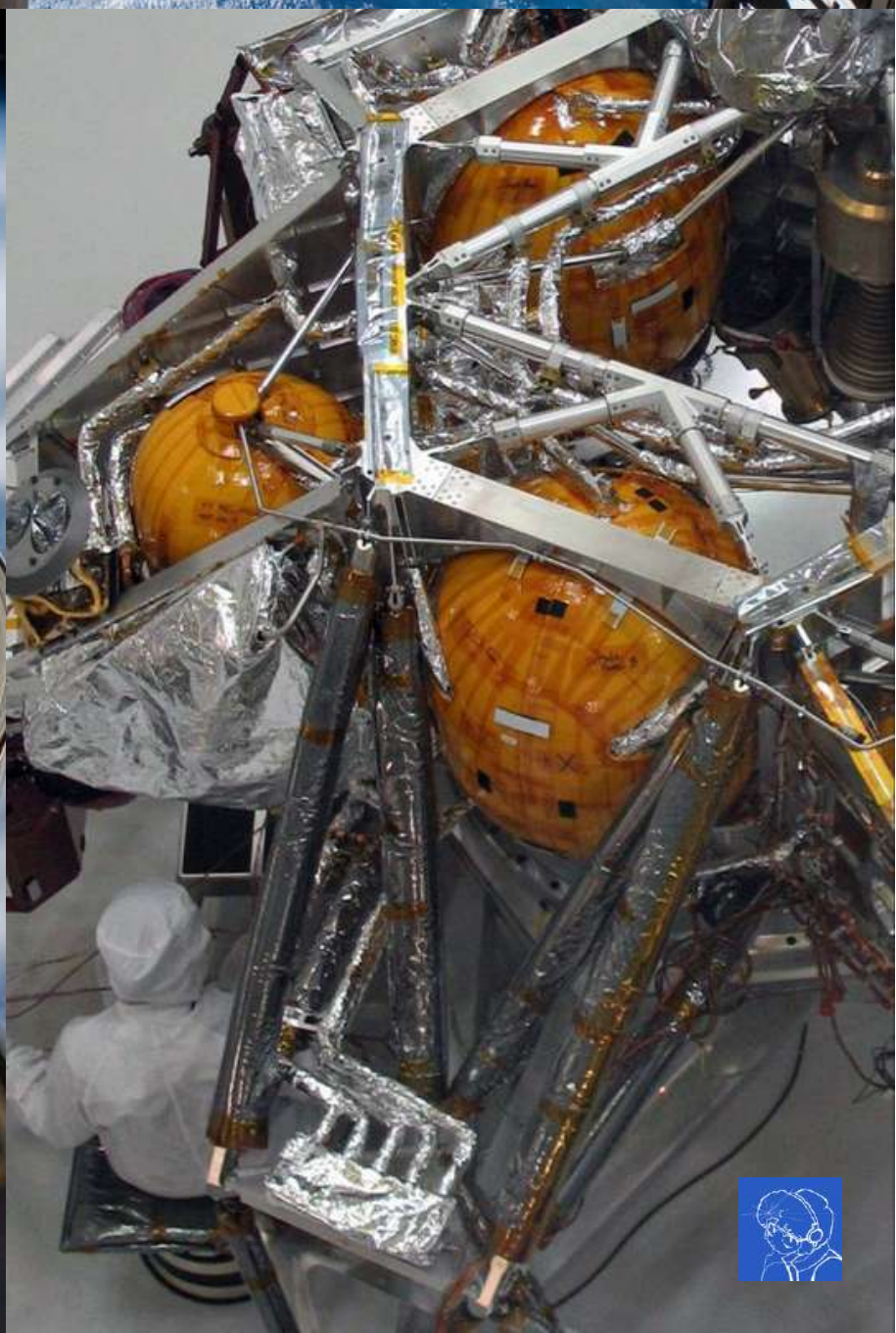


EMANUELE BONETTI

COSTRUZIONE DI MACCHINE





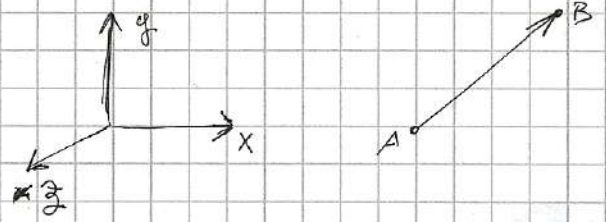
Costruzione di macchine

Grandezze: • scalari (massa, lavoro ...)

• Vettoriali (forza, spostamento, rotazione) → modulo, direzione, punto di applicazione

Utilizzeremo nel corso un sistema di riferimento:

Terna cartesiana:

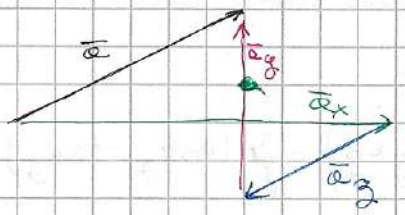


. il vettore si identifica tra due punti definiti da 3 scalari l'uno

$$\rightarrow \bar{a} = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix}$$

I vettori si possono scomporre in tre vettori paralleli agli assi contenuti di riferimento

$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z$$



si può anche definire una terna di versori paralleli agli assi di riferimento:

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

$$\bar{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

il modulo sarà $\bar{a}$:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Definiamo delle vettori generici

$$\bar{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\bar{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

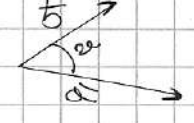
somma vettoriale:

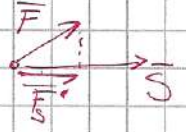
$$\bar{C} = \bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}$$

Prodotto scalare: → Esempio

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\alpha$$

$$L = \bar{F} \cdot \bar{S}$$

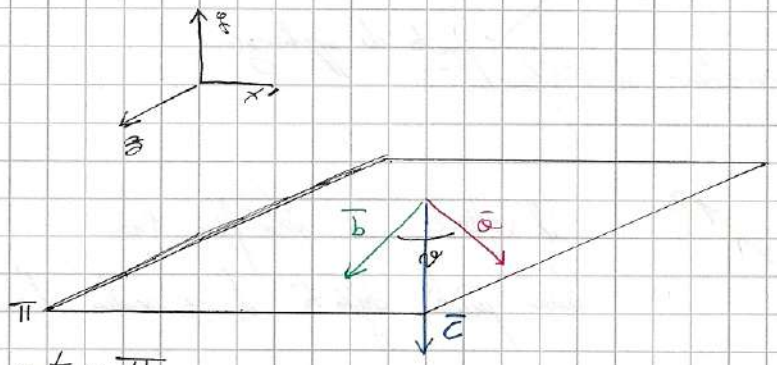




$$L = |\bar{F}| \cdot |\bar{S}| \cdot \cos\alpha = |\bar{F}_{//}||\bar{S}|$$

Prodotto Vettoriale:

Inizio col definire un piano e i vari sistemi di riferimento:



$\bar{a}, \bar{b} \in \pi$

$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ → $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\varphi)$

→ direzione di $\bar{c}$ è $\perp$ al piano di $\bar{a}$ e $\bar{b}$

↳ • regola della mano destra definisce il verso.

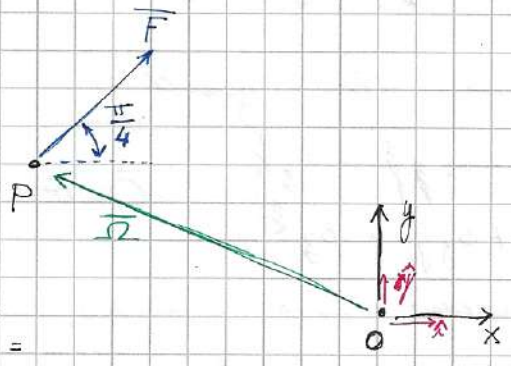
Lo stesso calcolo si può fare con un metodo matriciale

$$\bar{c} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{i}(a_y b_z - b_y a_z) - \hat{j}(a_x b_z - b_x a_z) + \hat{k}(a_x b_y - b_x a_y)$$

Esempio:

Le nostre strutture meccaniche saranno soggette a Forze e a Momenti

↳ Momento di una forza rispetto ad un polo



$\bar{F} = [400, 400, 0]$ [N]

$|\bar{\Omega}| = 100$ mm

$\bar{\Omega} = [\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z] = [-100\cos\frac{\pi}{6}, 100\sin\frac{\pi}{6}, 0] =$

$= \left[100\frac{\sqrt{3}}{2}, 100\frac{1}{2}, 0\right]$

$\bar{M}_o = \bar{\Omega} \times \bar{F} = \overrightarrow{(P-O)} \times \bar{F}$

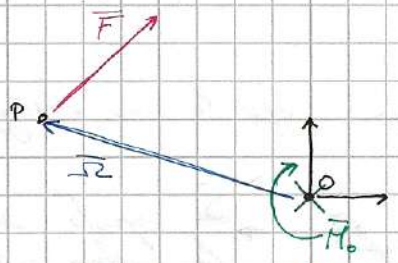
$$M_O = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 100\frac{\sqrt{3}}{2} & 100\frac{1}{2} & 0 \\ 100 & 100 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\left(-100\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 100 - 100\cdot\frac{1}{2}\cdot 100\right) \quad [F.l]$$

$\hat{k}$ → direzione

modulo di M_O

↳ verso = segno del modulo

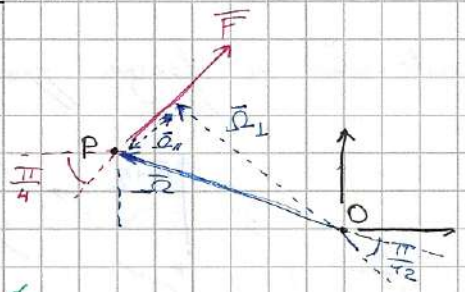
Il verso è entrante nella lavagna.



2° metodo: Calcolo del braccio della forza

$$\vec{M}_O = \vec{\Omega} \times \vec{F} = (\vec{\Omega}_{//} + \vec{\Omega}_{\perp}) \times \vec{F}$$

$$= \vec{\Omega}_{//} \times \vec{F} + \vec{\Omega}_{\perp} \times \vec{F}$$



$\vec{\Omega}_{//} \times \vec{F} = 0$

$|\vec{\Omega}_{//} \times \vec{F}| = |\vec{\Omega}_{//}|\,|\vec{F}| \sin\phi = 0$

$$|M_O| = |\vec{\Omega}_{\perp}|\,|\vec{F}|$$

quindi il modo più rapido è calcolare

$$M_O = \Omega_{\perp} \cdot F = \Omega \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot F$$

3° Metodo: Scomposizione della forza

$$\vec{M}_O = \vec{\Omega} \times \vec{F} = \vec{\Omega} \times (\vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}) = \vec{\Omega} \times \vec{F}_{//} + \vec{\Omega} \times \vec{F}_{\perp}$$

$\vec{\Omega} \times \vec{F}_{//} = 0$

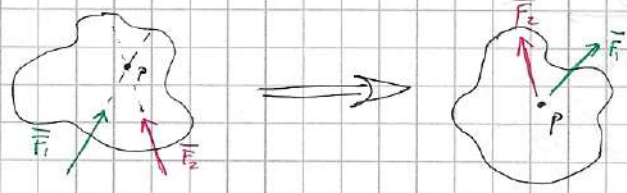
Infatti è analogo a quello precedente

Sistemi di forze equipollenti

Noi, finora, nel caso, corpi rigidi non deformabili (si sfiora pochissimo)

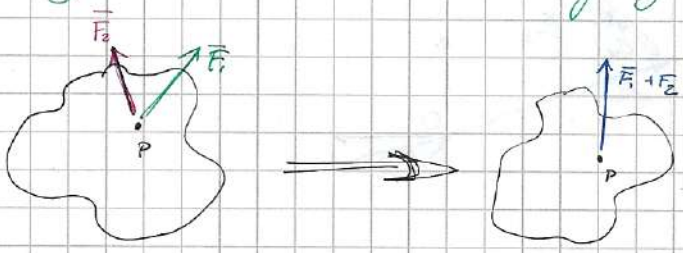
→ Due sistemi di forze si dicono equipollenti se si passa dall'uno all'altro con operazioni elementari

1° operazione: Spostamento di una forza lungo la sua direzione



→ Lo spostamento di forze lungo la loro retta di applicazione di corpo rimane in quiete. Si conserva quindi l'equilibrio meccanico del sistema.

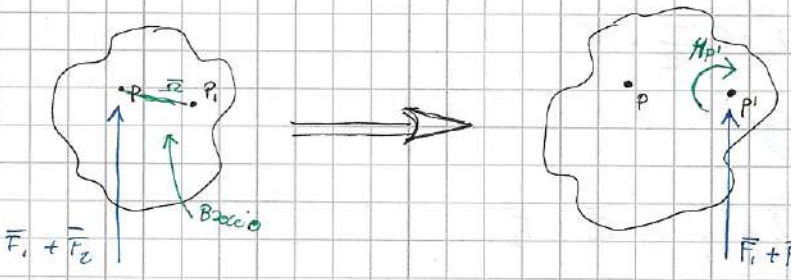
2° operazione: Somma vettoriale di forze applicate allo stesso punto.



→ Il corpo rimane in equilibrio meccanico perché la $\sum_1^n \bar{F}_i$ rimane uguale

3° operazione: Scomposizione di una forza: Analogo e reversa

4° operazione: Spostamento di una forza dalla sua retta di applicazione a seguito di un "momento di trasporto"



→ Lo spostamento di una forza dalla sua retta di applicazione è necessario tenere conto del momento di trasporto.

- Risultante del sistema di forze

$$\bar{R} = \sum_1^n \bar{F}_i$$

- Momento di un sistema di forze

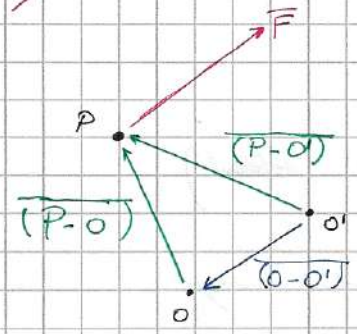
$$\bar{M}_O = \sum_1^n \overline{(P_i - O)} \cdot \bar{F}_i$$

O polo: punto nello spazio

P_i punto di applicazione della i-esima forza

← Se cambia il polo di riferimento, cambia il valore del momento

Esempietto



$$\bar{M}_O = (\overline{P-O}) \times F$$

$$\bar{M}_{O'} = (\overline{P-O'}) \times F =$$

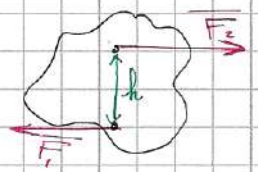
$$= (\overline{P-O}) \times \bar{F} + (\overline{O-O'}) \times \bar{F} = \underline{\bar{M}_O + (\overline{O-O'}) \times \bar{F}}$$

$$\bar{M}_O = \underbrace{\sum_i (\overline{P_i - O}) \times \bar{F}_i}_{\bar{M}_O} + \sum_i (\overline{O-O'}) \times \bar{F}_i = \bar{M}_O + (\overline{O-O'} \times \bar{R})$$

Utile

$$\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O + (\overline{O-O'} \times \bar{R})$$

• Definizione di coppia



$$\bar{R} = \emptyset$$

$$\bar{M}_O = F \cdot h$$

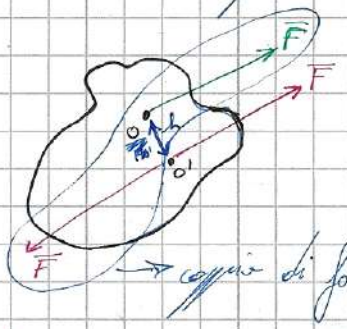
$$\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O + (\overline{O-O'}) \times \bar{R}$$

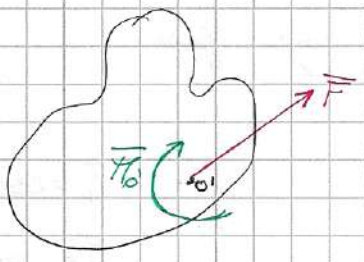
$\bar{R} = \emptyset$ → $\bar{M}_{O'}$ - Polo è costante

$[\bar{F}_1 = -\bar{F}_2]$

O'

• Momento di Trasporto





M_O → momento di trasporto

↳ $M_{O'} = h \cdot F$

Questo è un altro metodo per visualizzare il momento di Trasporto

• Postulato: In un corpo rigido, due sistemi di forze equipollenti producono gli stessi effetti meccanici

Per essere equipollenti:

↳ Devono avere lo stesso $\bar{R} = \sum_i^n \bar{F}_i$

↳ Devono avere lo stesso risultante dei momenti $\bar{M}_O$ rispetto allo stesso polo generico.

Sistemi meccanici

I nostri sistemi meccanici sono in "quiete":

- o sono fermi
- o sono in moto traslatorio ($V = cost$) (no effetti esterni)
- o non ruotano ($\omega = cost$)

$$\begin{cases} \rightarrow \overline{R} = \phi \\ \rightarrow \overline{M}_o = \phi \quad \forall O \end{cases}$$

deve valere questo sistema sempre

Ci sono anche i sistemi in leggera

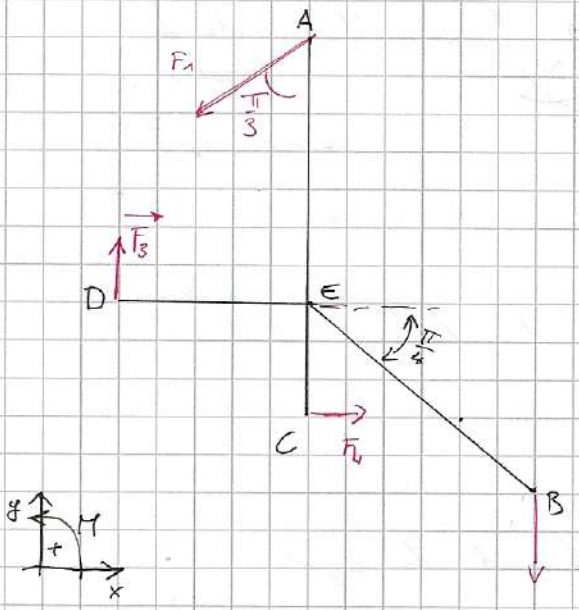
$$\begin{cases} \cdot\ \overline{R} = \phi \\ \cdot\ \overline{M}_o \neq 0 = costante \end{cases}$$

e i sistemi equilibrati a forze costanti

$$\begin{cases} \cdot\ \overline{R} \neq \phi \\ \cdot\ \text{ed esiste un polo per cui } \overline{M}_o = \phi \end{cases}$$

Esercizietto

Dato il seguente corpo rigido:



$F_1 = 250N$

$F_2 = 500N$

$F_3 = 100N$

$F_4 = 300N$

$\overline{AE} = 600mm$

$\overline{BE} = 750mm$

$\overline{CE} = 250mm$

$\overline{DE} = 200mm$

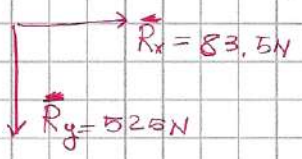
N.B.: $\overline{R}$ non dipende dal polo

Calcolare la risultante delle forze e dei momenti in E, C

. Soluzione

. $\bar{R} = \sum_i \bar{F}_i = \begin{cases} \bar{R}_x = \sum_i \bar{F}_{xi} = F_1 \sin\frac{\pi}{3} + \phi + \phi + F_4 = 83{,}5\,N \\ \bar{R}_y = \sum_i \bar{F}_{yi} = -F_1 \cos\frac{\pi}{3} - F_2 + F_3 + \phi = -525\,N \end{cases}$

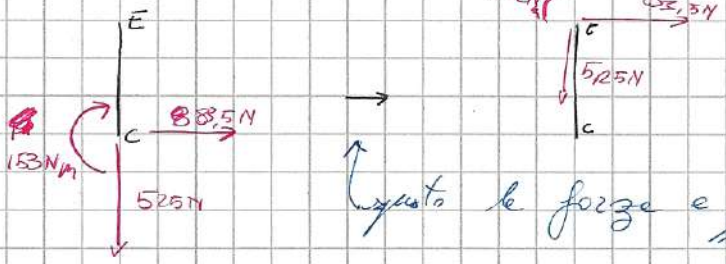
A punto:



. polo C:

$\bar{M}_C = \bar{F}_{1y} \cdot \phi + \bar{F}_{1x} \cdot (\overline{AE} + \overline{EC}) - F_2 \overline{BE} \frac{r_2}{2} - F_3 \cdot \overline{CD} + F_4 \phi \Rightarrow -153\,N\,m$

. Per il polo E sfruttiamo le proprietà invariantive



Ridotto le forze e ottenuto le proprietà invariantive

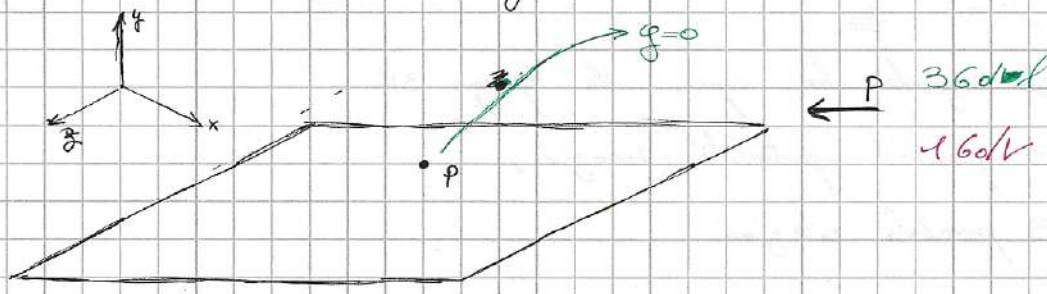
Cinematica

→ Punto materiale

↳ Gradi di libertà: "quanti ridotti che ci permettono di individuare la posizione di un punto di corpo rigido."

Dato un sistema di riferimento (cartesiano, cilindrico, sferico etc...)

- Indichiamo con GDL i gradi di libertà del sistema
- Indichiamo invece con GDV i gradi di vincolo del sistema:



36 dof

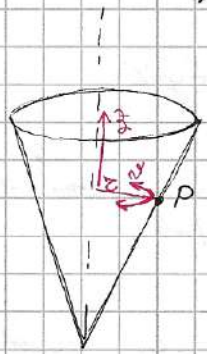
16 dof

In un sistema vincolato vale questa equazione:

$$GdL - GdV = GdL_{tot}$$

Esempio

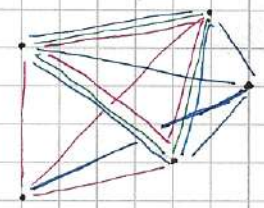
Data una superficie conica:



P deve essere sempre sulla superficie conica. ⟹

$$\Rightarrow \begin{cases} (z, \vartheta) \rightarrow 2 \text{ GdL} \\ r \rightarrow 1 \text{ GdV} \end{cases}$$

→ Partiamo ora dal punto materiale al corpo rigido:



N	N° eq di vincolo	N° eq vincolo linearmente indip	GdL totali	GdL
3	3	3	6	9
4	6	6	6	12
5	10	9	6	15

Il numero di GdL di un qualunque corpo rigido nello spazio 3D sono sempre 6

→ Il corpo rigido ha sempre nello spazio 3D:

→ 3 possibili spostamenti (traslazioni)

→ 3 possibili rotazioni

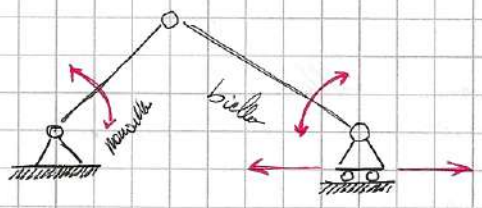
Consideriamo ora il corpo rigido in un piano 2D:

→ 3 GdL → x traslazione

→ y traslazione

→ ϑ rotazione

Facciamo come esempio il sistema biella-manovella:



2 corpi rigidi → $3n = 6$ GdL
(non corpi rigidi)

- Questi oggetto si DEVE muovere e NON si comporta come un corpo rigido.

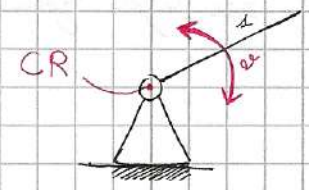
Il nostro scopo è capire quanti e quali sono i gradi di vincolo e se il sistema è in grado di muoversi o meno.

Per avere una struttura senza possibilità di movimento è condizione necessaria, ma non sufficiente la seguente disuguaglianza

$$GdV \geq GdL$$

Tipologie di Vincoli

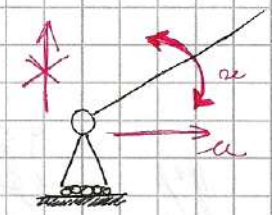
→ Cerniera a Terra



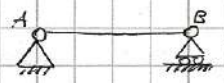
GdL = 3n
GdV = 2
GdL res = 1

→ Sistema Invincolato

→ Carrello a Terra

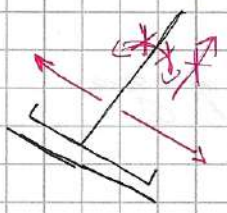


GdL = 3
GdV = 1
GdL res = 2



↑
Sistema Invincolato
3 GdL
3 GdV

→ Incastro / Incastro a Terra

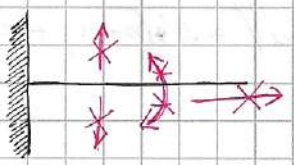


GdL = 3
GdV = 2
GdL res = 1



← Sistema Ipervincolato
4 GdV
3 GdL

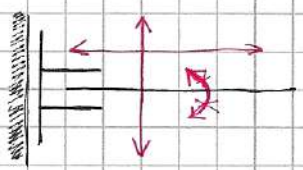
→ Incastro a Terra



GdL = 3
GdV = 3

← Iso-vincolato

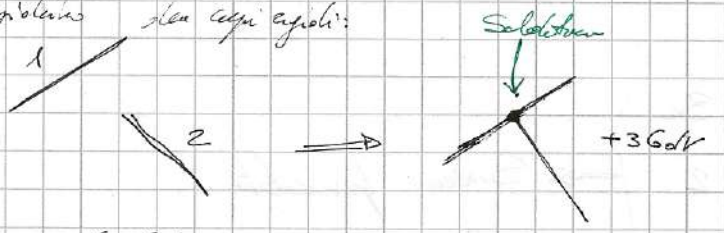
→ Bipattino a Terra



GdV = 3
GdL = 2
GdL res = 2

Vincoli interni:

Cerniera dei cinematismi:

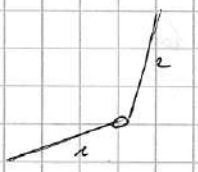


$$\begin{array}{r} 6\,GdL - \\ 3\,GdV = \\ \hline 3\,GdL \end{array} \equiv \text{Corpo rigido}$$

$3n = 6\ GdL$

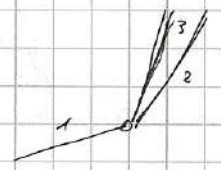
$0\ GdV$

Aggiungiamo una nuova cerniera interna



$$\begin{array}{r} 6\,GdL - \\ 2\,GdV = \\ \hline 4\,GdL \end{array}$$

Aggiungiamo in cascata



$$\begin{array}{r} 9\,GdL \\ 4\,GdV \\ \hline 5\,GdL \end{array}$$

Aggiungendo n-aste, per il numero vale la seguente espressione:

$$GdL_{\text{cerniere}} = 3 + (n-1)$$

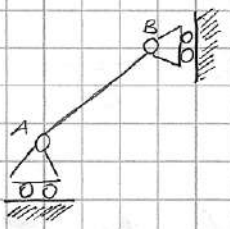
$$GdV_{*} = 2 \cdot (n-1)$$

Terminazione ancorata fissata

Se la cerniera fosse a Terra: $GdV = 2 \cdot (n-1) + 2$

Esempi di Cinematica

I



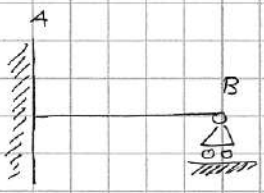
$3n = 3$ GdL

$GdV = 1_A + 1_B = 2$

$GdL - GdV = $ Gdl residui $= 1$

IPOVINCOLATA

II



3 GdL

$3_A + 1_B = 4$ GdV

Ipo - Vincolata

III

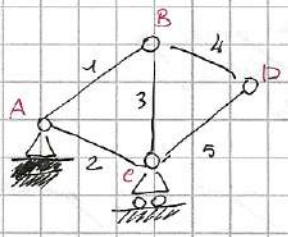


3 GdL

5 GdV

2 volte Ipo - Vincolata

IV

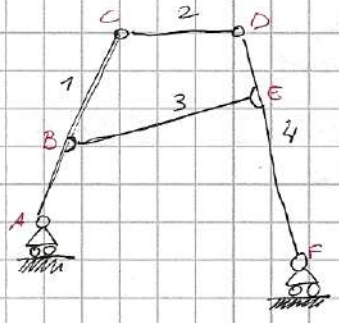


$GdL = 3n = 15$

$GdV = (2m)_A + 2(2n'-1)_B + (2n'-1)_C + 2_D = 15$

$GdL = GdV =$ Iso - Vincolata

V



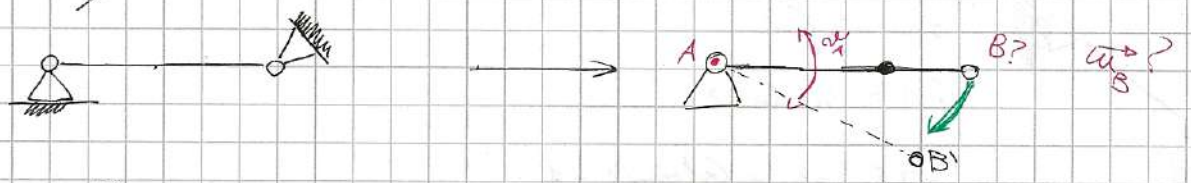
$3n = 12$ GdL

$1_A + 2_B + 2_D + 2_E + 1_F = 10$

Ipo - Vincolata $\Rightarrow$ Cinematismo $\rightarrow$ si muove

Vincoli imposti e subiti

Consideriamo questo sistema:



3 GdL
(2+1) GdV } → Isovincolata

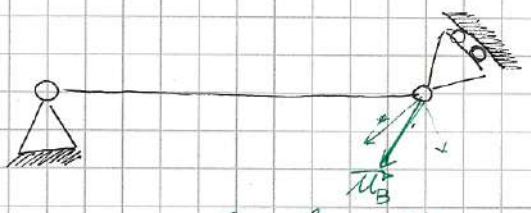
Come si comporta il vettore $\vec{u}_B$? Una volta che l'asta è libera di muoversi.

Immaginiamo il vettore:

$$\vec{u}_B = \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ \omega_B \end{Bmatrix}$$

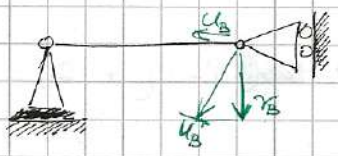


Introduciamo ora il carrello:



Il carrello pone un vincolo che annulla una componente del vettore spostamento e siamo in una struttura di questo tipo si definisce isostatica

Analizziamo ora questo caso:



Si potrebbe pensare che l'asta è in una struttura isostatica, ma ciò è valido solo per piccoli spostamenti. Noi dobbiamo lavorare nel campo dei piccoli spostamenti e rotazioni

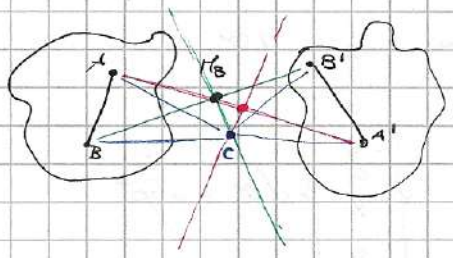
Per piccoli spostamenti la componente v_B si annulla lasciando solo quella verticale, su cui il carrello non impone vincoli.



La struttura ha quindi una labilità interna e si definisce

LABILE

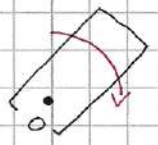
• Consideriamo un corpo rigido nello spazio e applichiamo un rototraslazione generica



• I triangoli ABC e A'B'C sono uguali.

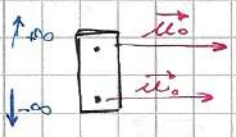
• Possiamo dire che una qualsiasi rototraslazione può essere ricondotta ad una rotazione attorno ad un punto che si chiama **CR** (centro di rotazione)

PURA ROTAZIONE



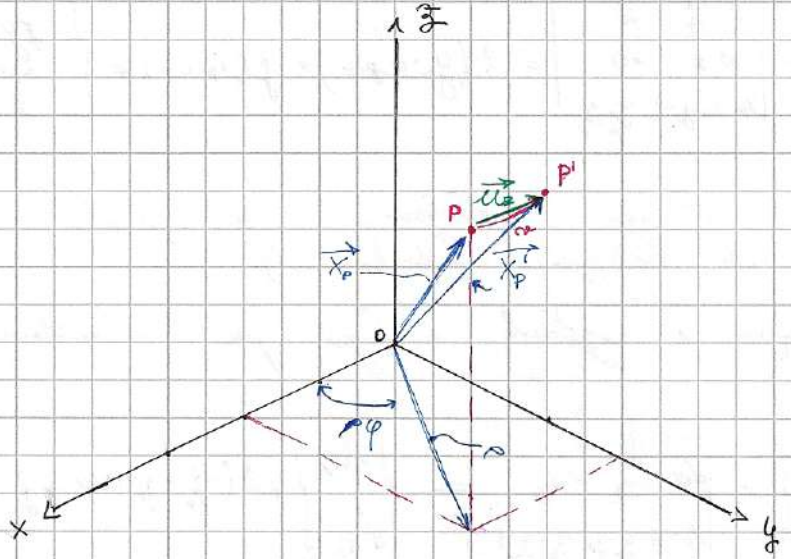
$O \equiv CR$

PURA ~~TRASLAZIONE~~ TRASLAZIONE



$CR = \pm\infty$

• Definiamo un generico corpo rigido sul piano xyz e identifichiamo P come suo punto generico



O ∈ Asse di rotazione

Imponiamo di dare una rotazione ν attorno a z

deve definire:

$\vec{u}_B = f(\omega)$

Usiamo le coordinate cilindriche

$$\vec{X}_P = \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \vec{X}'_P = \begin{cases} x' = \rho\cos(\varphi+\nu) \\ y' = \rho\sin(\varphi+\nu) \\ z' = z \end{cases}$$

$$\vec{u}_{BP} = \vec{X}_P - \vec{X}'_P = \begin{cases} \rho[\cos(\varphi+\nu) - \cos\varphi] \\ \rho[\sin(\varphi+\nu) - \sin\varphi] \\ 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{Non lineare}$$

$$\overrightarrow{u_{yp}} = \overrightarrow{x_{p_2}} - \overrightarrow{x_p} = \begin{cases} \rho[\cos(\varphi+\vartheta) - \cos\varphi] \\ \rho[-\sin(\varphi+\vartheta) - \sin\varphi] \\ 0 \end{cases} \Longrightarrow$$ Siccome non è lineare possiamo solo una piccola rotazione

Consideriamo la rotazione ϑ infinitesima $\rightarrow d\vartheta$

$$\left.\frac{\partial \overrightarrow{u_p}}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta=0} \cdot d\vartheta = \left\{ \begin{matrix} -\rho\sin(\varphi+\vartheta) \\ \rho\cos(\varphi+\vartheta) \\ 0 \end{matrix} \right\}_{\vartheta=0} d\vartheta = \left\{ \begin{matrix} -y \\ x \\ 0 \end{matrix} \right\} d\vartheta = d\overrightarrow{u_p}$$

Considerando tutte le possibili rotazioni nello spazio 3D, otteniamo:

$\rightarrow$ Generalizziamo $d\vartheta_x, d\vartheta_y, d\vartheta_z, du_p, dv_p, dw_p$

$$d\overrightarrow{u_p} = d\overrightarrow{u_p}\, d\overrightarrow{\vartheta} \times \overrightarrow{P-O} \qquad (*)$$

↖ contiene tutte le rotazioni grazie questo vettore

Applichiamo $(*)$ e calcoliamo prima rotazione $d\vartheta_z$

$$du_p = 0$$

$$dv_p = d\vec{\vartheta} \times \overrightarrow{P-O} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & d\vartheta \\ x_p - x_0 & y_p - y_0 & z_p - z_\vartheta \end{vmatrix} = \hat{i}\,(y_p \cdot d\vartheta) + \hat{j}\,(x_p\, d\vartheta) = \left\{ \begin{matrix} -y_p d\vartheta \\ x_p d\vartheta \\ 0 \end{matrix} \right\} d\vartheta \quad \square$$

Il centro di una rotazione infinitesima con grado è detto CIR (Centro di rotazione istantanea)

Utilizzando questa espressione è difficile e lungo per studiare

caso $*$ $\quad d\overrightarrow{u_p} = \begin{Bmatrix} du_p \\ dv_p \\ dw_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du_\vartheta \\ dv_\vartheta \\ dw_\vartheta \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ d\vartheta_x & d\vartheta_y & d\vartheta_z \\ x_p - x_0 & y_p - y_0 & z_p - z_0 \end{vmatrix} \underset{\uparrow 2D}{=} \begin{Bmatrix} du_\vartheta \\ dv_0 \end{Bmatrix} + \hat{i}\{-y_p - y_x)\, d\vartheta - \hat{j}\,(x_p - x_0)\, d\vartheta_z$

p è punto generico corpo rigido

x_0, y_0, z_0 è punto asse di rotazione

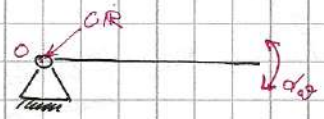
$du_\vartheta, dv_\vartheta, dw_\vartheta$: Traslazione rigido:

$$\rightarrow \begin{cases} du_p = du_\vartheta - d\vartheta_z (y_p - y_\vartheta) = 0 \\ dv_p = dv_\vartheta - d\vartheta_z (x_p - x_\vartheta) = 0 \end{cases} \xrightarrow{p \to CIR} \begin{cases} \frac{du_\vartheta}{d\vartheta_z} = y_{CIR} - y_0 \\ x_{CIR} - x_0 = -\frac{dv_0}{d\vartheta_z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{CIR} = -\frac{dv_0}{d\vartheta_z} - x_0 \\ y_{CIR} = \frac{du_0}{d\vartheta_z} + y_0 \end{cases} \longleftarrow \text{coordinate del CIR}$$

CIR dei vari vincoli:

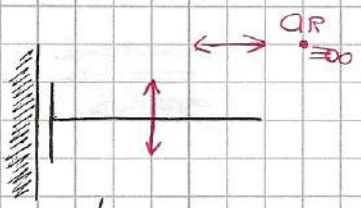
- Cerniera



$du_\phi = dv_\phi = \phi$

$d\vartheta \neq \phi$

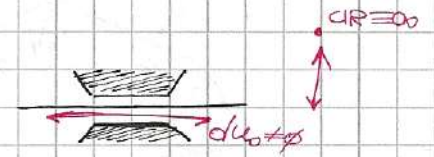
- Pattino a terra



$dv_0 \neq \phi$

$d\vartheta = \phi = du_0$

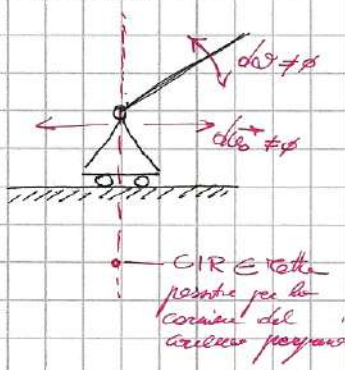
- Manicotto



- Incastro



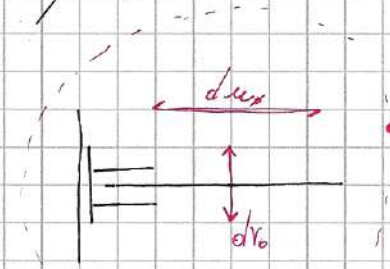
- Carrello



$x_{CIR} = x_\phi$

$y_{CIR} = \frac{du_\vartheta}{d\vartheta_2} + y_\phi$

- Bipattino

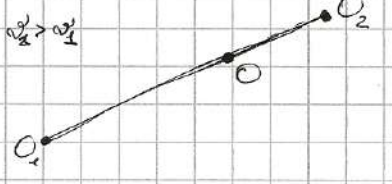


CIR appartiene ad una Retta impropria



TEOREMA:

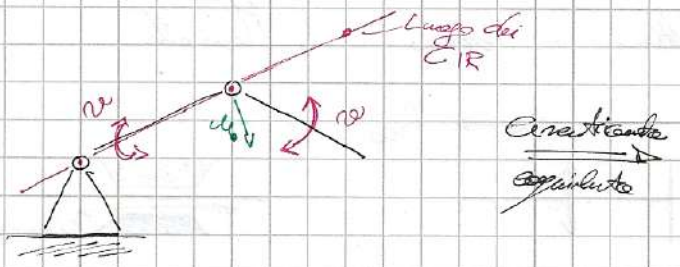
Due rotazioni ϑ_1 e ϑ_2 infinitesime e ampiezza $d\vartheta_1$ e $d\vartheta_2$ equivalgono ad una rotazione di ampiezza pari alla somma dei moduli $(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ attorno ad un centro O allineato con O_1 e O_2 e posto ad una distanza da o_1 e o_2 inversamente proporzionale ai valori di ϑ_1 e ϑ_2



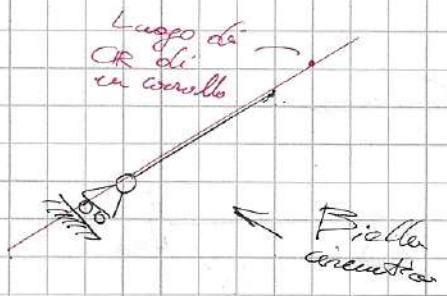
Nella statica meccanica il moto del corpo è regido se tutti i punti infinitesimi atti di moto potenziali. Se esiste allora esiste un CIR di quel moto.

Se i CIR dei singoli vincoli non coincidono non può esistere un CIR per l'intero corpo meccanico. La struttura non è quindi labile perché non atti infinitesimi di moto potenziali.

Consideriamo un pilla: [illegible]



Caratteristica cinematica



Ciò accade vale solo per spostamenti infinitesimi

Reazioni Vincolari

→ I vincoli sono in grado di sviluppare forze in grado di mantenere il corpo in condizioni di riposo fermo. Il nostro scopo è calcolare queste forze.

Per fare questo dobbiamo usare una serie di principi ed equazioni:

→ 1° principio della dinamica

- $m\vec{v} = cost$ — $m\vec{v} \neq \phi$ / $m\vec{v} = \phi$
- $I \cdot \omega = costante$ ← quantità di moto

↳ Di conseguenza:

$$\left.\begin{aligned} \vec{R} &= \phi \\ \vec{M}_{A0} &= \phi \end{aligned}\right\} \text{quiete del corpo}$$

← condizioni necessarie e sufficienti all'equilibrio del corpo

→ 2° principio della dinamica

$$\vec{R} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{M} = \omega \cdot I$$

Nel caso di un corpo nello spazio 3D:

$$\begin{cases} R_x = \phi \\ R_y = \phi \\ R_z = \phi \\ M_{A0x} = \phi \\ M_{A0y} = \phi \\ M_{A0z} = \phi \end{cases} \xrightarrow[\text{spazio 2D}]{\text{Mo se ci troviamo nello}} \begin{cases} R_x = \phi \\ R_y = \phi \\ M_{A0z} = \phi \end{cases}$$

← Queste condizioni in uno spazio 2D garantiscono l'equilibrio del corpo.

Ayuda $\begin{cases} \vec{R} = \phi \\ \vec{M}_{A\phi} = \phi \end{cases}$ ottengo delle equazioni che mi permettono di calcolare le reazioni vincolari incognite.

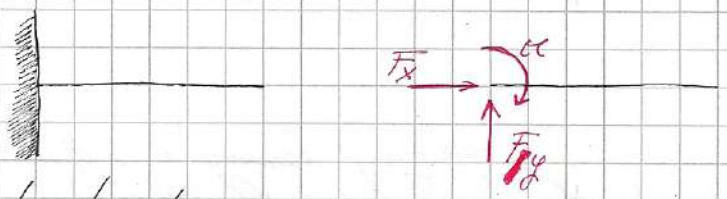
Ciò ci permette di risolvere soltanto la struttura isostatica, non iperstatica!

Vincoli ideali

- Lisci (non oppongo resistenza rispetto al GdL)
- Bilateri (il verso delle reazioni vincolari può essere qualsiasi)
- Perfetti (l'intensità delle forze non è limitata)
- Rigidezza infinita

Esempi di vincoli:

- Incastro:



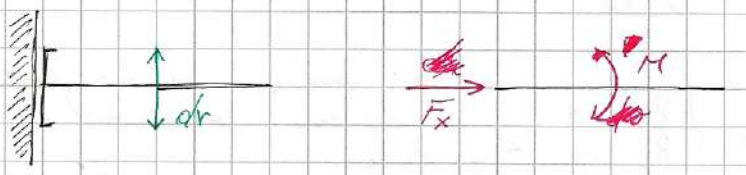
$du, dv = d\vartheta = \phi$

- Cerniera o terra



$du, dv = \phi$
$d\vartheta \neq \phi$

- Pattino o terra



$du, d\vartheta = 0$
$dv \neq \phi$

- Carrello o Terra



$dv = \phi$

$du, d\vartheta \neq \phi$

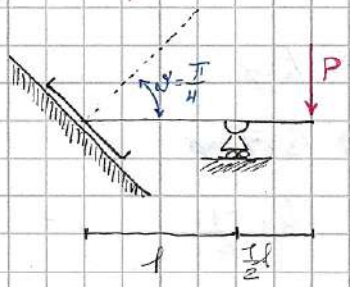
Biellino a terra



$du, dv \neq \phi$

$d\vartheta = \phi$

Esercizio esempio (1):



3 GdL

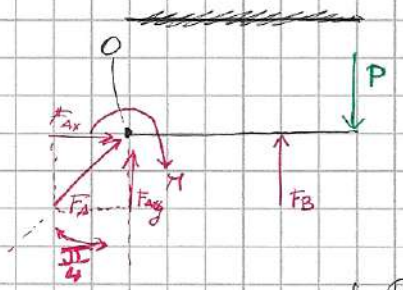
$q_A = q_B = 3$ GdL (effettivi)

Isostatico, non labile

~~non~~ un CR → struttura in quiete (non vincolata)

Volgiamo le seguenti equazioni $\begin{cases} \overline{R} = \phi \\ M_{A\phi} = \phi \end{cases}$ → Andiamo per gradi:

Passo 1): sostituiamo la struttura con forze e reazioni vincolari



$$\begin{cases} \overline{R_\phi} = \phi \\ \vec{M}_{A\phi O} = \phi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} R_x = \phi \\ R_y = \phi \\ M_{AO} = \phi \end{cases}$$

$R = \sum_i \vec{F_i} \longrightarrow \begin{cases} 1) \; R_x = \sum_i F_{ix} = \phi \\ 2) \; R_y = \sum_i F_{iy} = \phi \\ 3) \; M_{AO} = \sum_i M_{Oi} = \phi \end{cases}$ Portiamo delle prime equazioni

Passo 2) Usiamo le equazioni:

$\sum_i F_{ix} = \phi$

$\xrightarrow{+}$: $F_{Ax} = \phi = F_A \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} F_A = \phi$ ← Il grado di vincolo non è eliminato

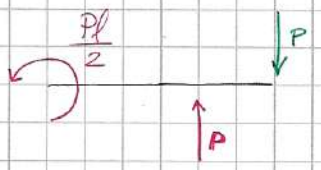
$\sum_i F_{iy} = \phi$

$+\uparrow$: $-P + F_B + F_{Ay} = \phi$ → ϕ perché $F_A = \phi$ $\longrightarrow$ $F_B = P$

$\sum_i M_{Oi} = \phi$

$\circlearrowleft$: $F_A \cdot \phi - M + \underbrace{F_B}_{P} \cdot l + \underbrace{P\left(l + \frac{1}{2}l\right)}_{\frac{3}{2}l} = \phi \longrightarrow M = P \cdot l - \frac{3}{2} P \cdot l = -\frac{1}{2} P \cdot l$

Passo 3): Disegno la soluzione finale

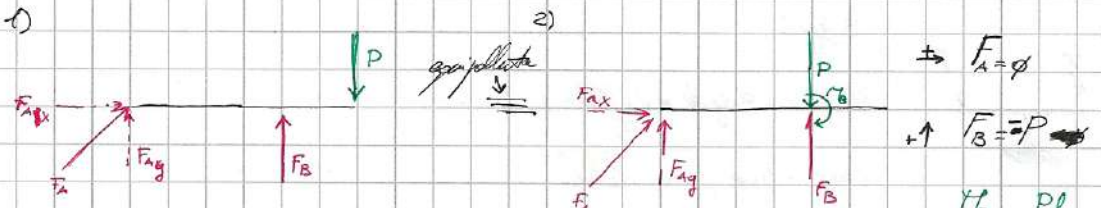


$$\sum_i F_{xi} = 0$$

$$\sum_i F_{gi} = 0$$

$$\sum_i M_{bi} = \frac{1}{2} Pl$$

Risolvo ora il problema spostando le forze e applicando i relativi momenti di trasporto:



$\rightarrow F_A = 0$

$+\uparrow F_B = P$

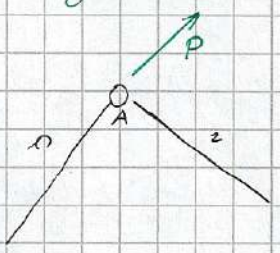
$M_B = \frac{Pl}{2}$

2): $\frac{1}{2} P \cdot l + M = 0 \rightarrow M = \frac{1}{2} Pl$

Nella scrivere la soluzione, bisogna riportare le forze nello stato originale

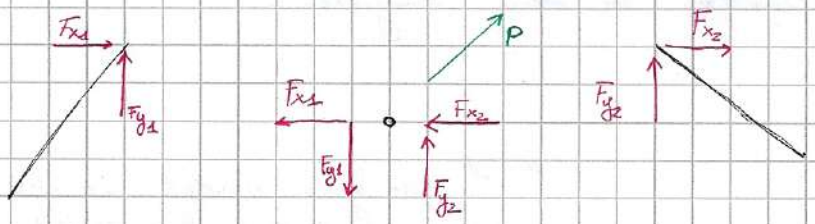
- Esercizio esempio ②, Electric Boogaloo:
Vincoli interni:

Consideriamo 2 corpi rigidi con una forza applicata nella cerniera che li congiunge:



Passo 1): Scegliere il corpo rigido

1 A 2



"Corpo rigido" cerniera

↓

punto spaziale bloccato

↳ $R_x = 0$

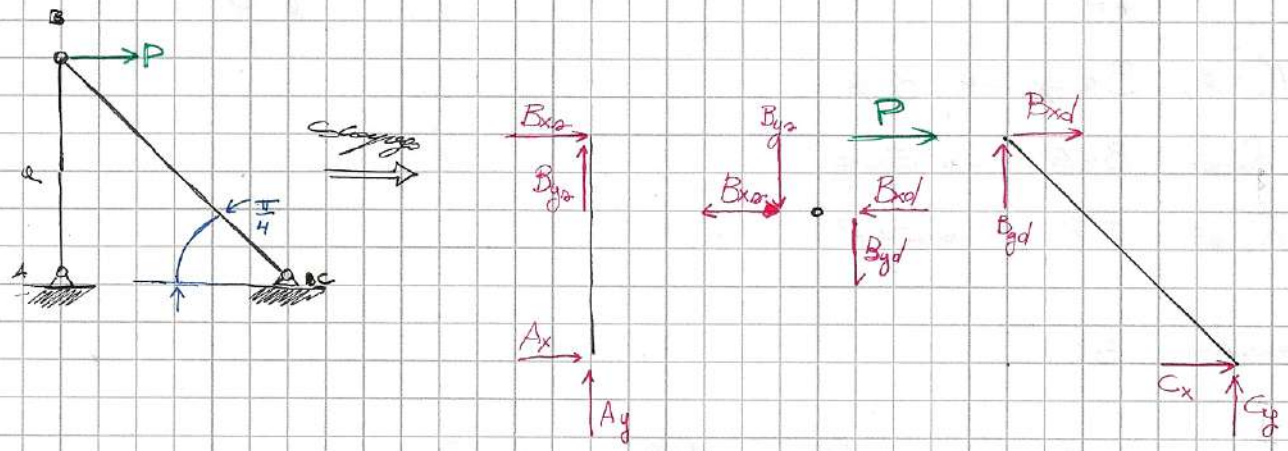
$R_y = 0$

Manca $M_z = 0$ perché un punto non può garantire momento.

Si segue il normale utilizzo delle equazioni di equilibrio

- Esercizio esempio ③, il ritorno: Vincoli interni, spazio grafico:

1 B 2

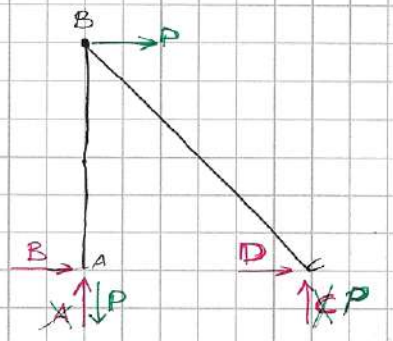


Corpo 1:

$$\rightarrow \begin{cases} B_{x1} + A_x = 0 \\ B_{y1} + A_y = 0 \\ B_{x1} \cdot a = 0 \end{cases}$$

← Potremo scrivere le equazioni in modo molto più ordinato, come il metodo è molto lungo. Si preferisce un approccio grafico:

Passo 0: Prima di operare la struttura, vediamo le reazioni vincolari a terra:



$M=\phi$:

$(+)$: $C \cdot \alpha - P \cdot \alpha = \phi \rightarrow C = P$

$R_y = \phi$: $A + P = \phi \rightarrow A = -P$

$R_x = \phi$: $B + D + P = \phi$

Ora, vincolando la struttura ho una incognita

Corpo rigido 1:



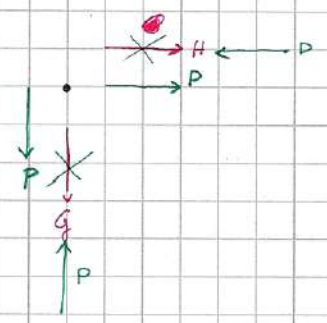
" Un corpo rigido vincolato da due cerniere senza forze applicate direttamente al corpo è una Biella "

↓

" Trasmette solo forze assiali "

$$\begin{cases} M_O = \phi: & B\,a = \phi \rightarrow B = \phi \\ R_x = \phi: & B + E = \phi \rightarrow E = \phi \\ R_y = \phi: & F - P = \phi \rightarrow F = P \end{cases}$$

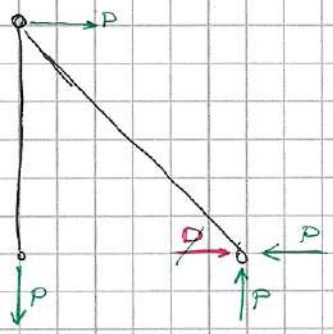
Secondo B:



$R_x = \phi$: $H + P = \phi \rightarrow H = -P$

$R_y = \phi$: $G + P = \phi \rightarrow G = -P$

- Applichiamo quanto trovato sul corpo completo:

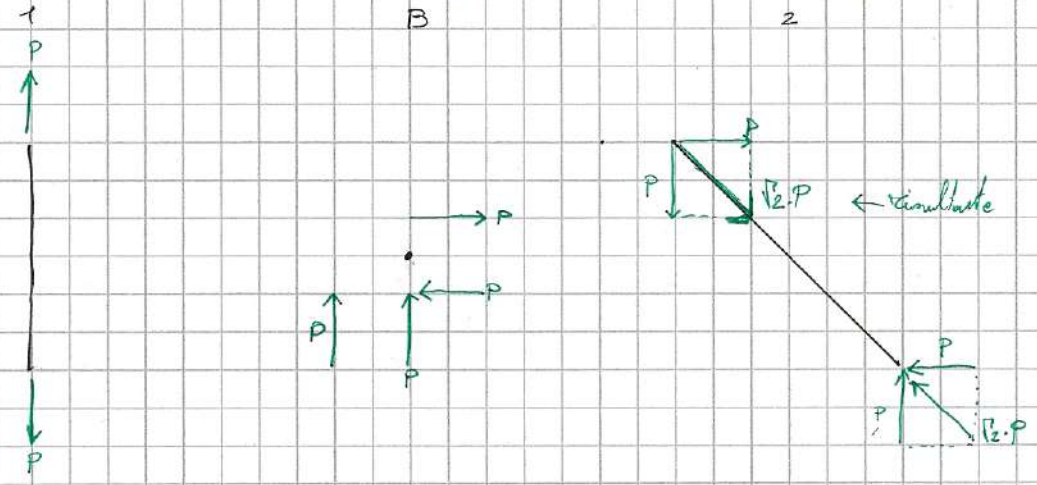


$R_x = 0$

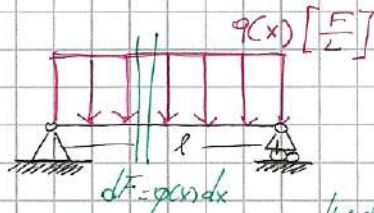
$D + P = 0$

$D = -P$

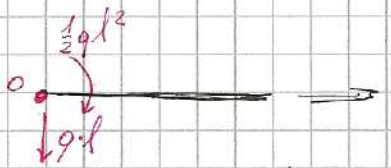
- Scarico la soluzione finale™ sul corpo scomposto



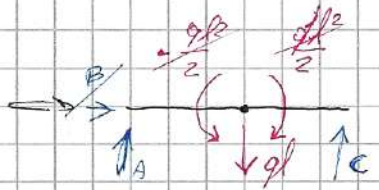
Esercizio Esempio ④: The empire strike back (carichi distribuiti)



$R_y = \int dF = \int_0^L q(x)dx = q \cdot l$ (la geometria come)



$M_O = \int_0^l dF \cdot x = \int_0^l q\,dx \cdot x = q\frac{1}{2}l^2 =$

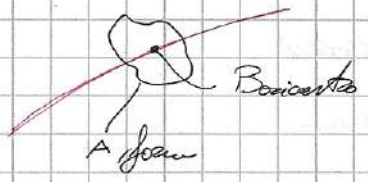


$A = q \cdot l \cdot \frac{1}{2}$

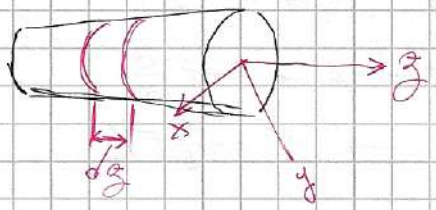
$B = q\,l\,\frac{1}{2}$

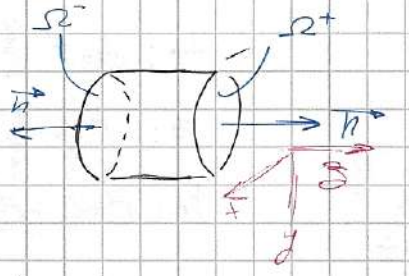
Azioni interne

Consideriamo una trave con qualsiasi geometria:

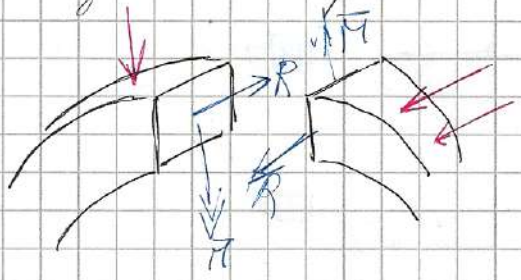


→ Carico di



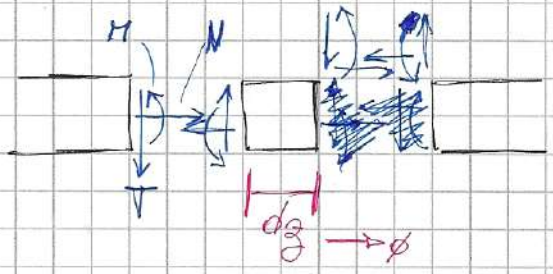


Immaginiamo di prendere una trave e sviluppo interamente questa è soggetta a carico. Possiamo vedere delle reazioni interne uguali ed opposte

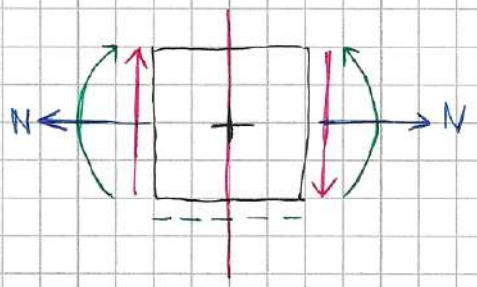


→ 6 equazioni di equilibrio $\overline{R}$ $\overline{M}$

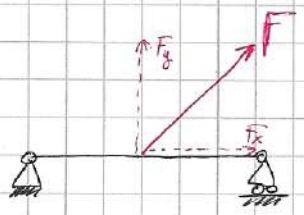
Possiamo dire che è 2D



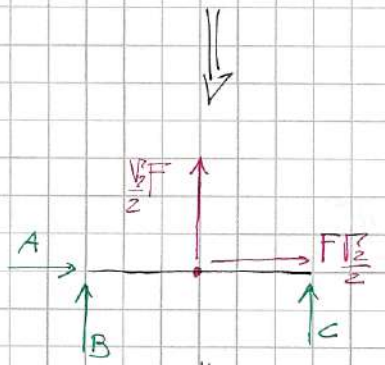
Convenzione del segno delle reazioni interne



Esercizio Esempio ①:



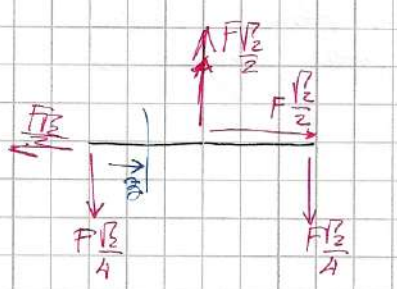
- Cinematica
- Reazioni Vincolari
- Agioni interne



$\xrightarrow{+}: A + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow A = -F\frac{\sqrt{2}}{2}$

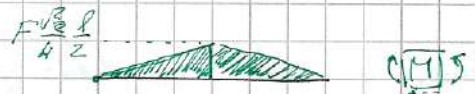
$\circlearrowleft: F\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{\sqrt{2}} + Cl = 0 \rightarrow C = -F\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\uparrow_+: B + C + F\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow B = -\frac{1}{4}F\sqrt{2}$

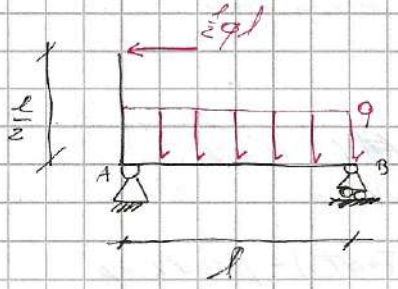




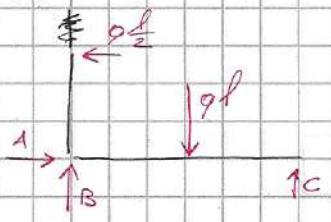




Struttura ad L





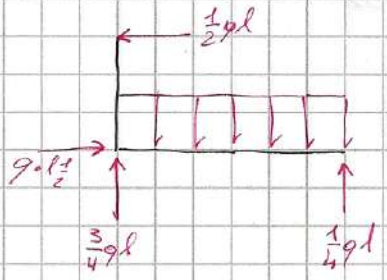


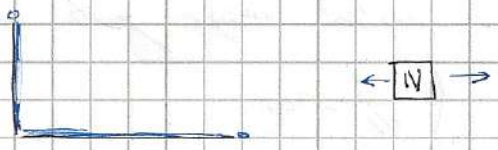
$\rightarrow$: $A - q \cdot l\frac{1}{2} = \phi \rightarrow A = ql\frac{1}{2}$

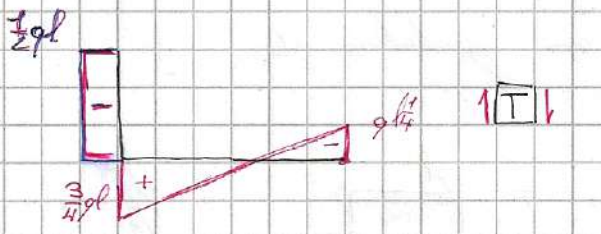
A $(+)$: $\frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - q l \frac{l}{2} + Cl = \phi \rightarrow C = \frac{ql}{4}$

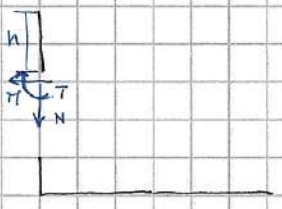
$\uparrow$: $B + C - q \cdot l = \phi \rightarrow B = \frac{3}{4} ql$

Ora che ho calcolato le reazioni vincolari, traccio il mio diagramma:









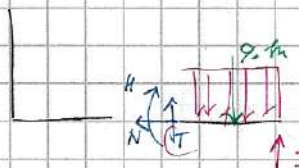
$N = \phi$

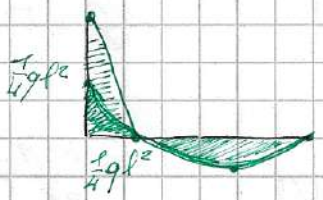
$T + \frac{ql}{2} = \phi$

$T = -\frac{ql}{2}$

$M - \frac{q}{2} n = \phi$

$M = q\frac{l}{2} n$





$T + \frac{ql}{4} - qn = \phi$

$T = qn - ql\frac{1}{4}$ — $n = \phi \leftrightarrow -\frac{ql}{4}$; $n = l \rightarrow \frac{3}{4} ql$

$M - \frac{ql}{4} n + \frac{qn^2}{2} = \phi$

$M = -\frac{qn^2}{2} + \frac{ql}{4} n$ — $n = \phi \rightarrow \phi$; $n = l \rightarrow -\frac{ql^2}{4}$

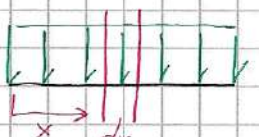
51:35

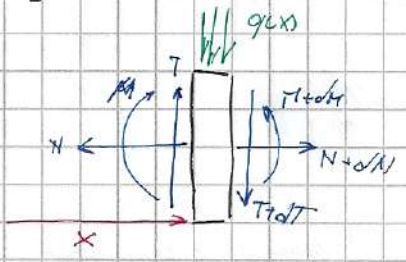
$\frac{dM}{n} = -qn + \frac{ql}{4} = \phi \quad \Leftarrow n = \frac{l}{4}$

$M(n - \frac{l}{4}) =$

Metodo differenziale

Consideriamo una qualsiasi trave soggetta a carichi distribuiti





$\rightarrow N + dN - N = 0$

$dN = 0$

$\rightarrow T - (T + dT) - q(x)\,dx = 0$

$-dT = q(x)\,dx$

$\frac{dT}{dx} = -q(x)$

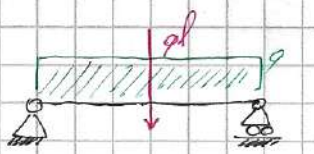
$\rightarrow M + T\,dx - (q\,dx)\frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$

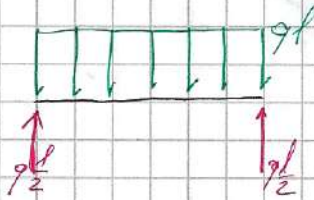
$T(x) = \frac{dM}{dx}$

quindi, in sintesi valgono queste due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dx} = T(x) \\ \frac{dT}{dx} = -q(x) \end{cases}$$

Esempio applicativo (a)





$\frac{dT}{dx} = -q$

$\frac{dM}{dx} = T \longrightarrow \frac{d^2M}{dx} = \frac{dT}{dx} = -q$

$\rightarrow \frac{d^2M}{dx} = -q \rightarrow \frac{dM}{dx} = -qx + A \rightarrow$

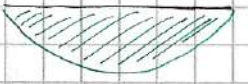
$$\rightarrow \begin{cases} M(x) = -\frac{q}{2}x^2 + Ax + B \\ M(x=0) = 0 \rightarrow B = 0 \\ M(x=l) = 0 \rightarrow A = \frac{q}{2}l \end{cases}$$

$T(x) = -qx + \frac{q}{2}l$

$M(x) = -\frac{q}{2}x^2 + \frac{q}{2}lx$



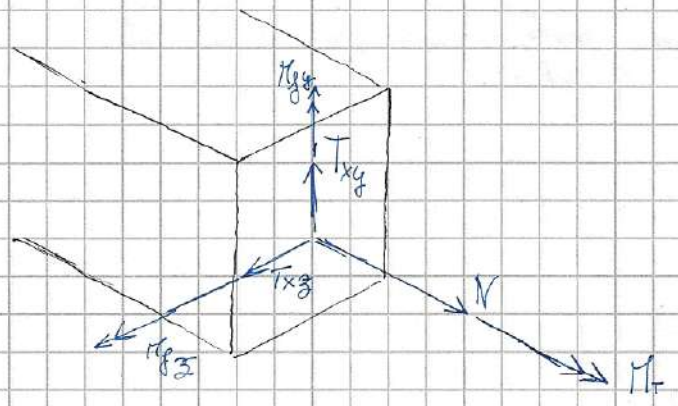
|T|

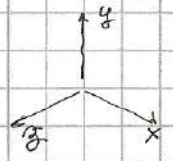


(M)

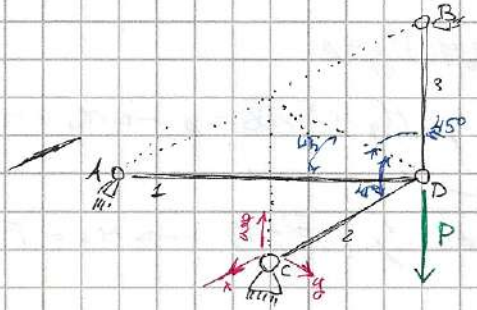
Azioni interne 3D

Nello spazio 3D ci sono 6 vincoli per vincolare bene la struttura. Considerando una generica sezione di trave.





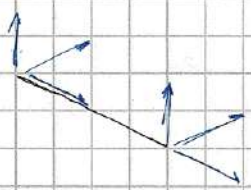
Esercizio esempio ⑪.



$3 \cdot 6 = 18$ gdl

$3A + 3B + 3C + (3+3)_D = 15$ gdV

1, 2, 3 → Bielle 3D

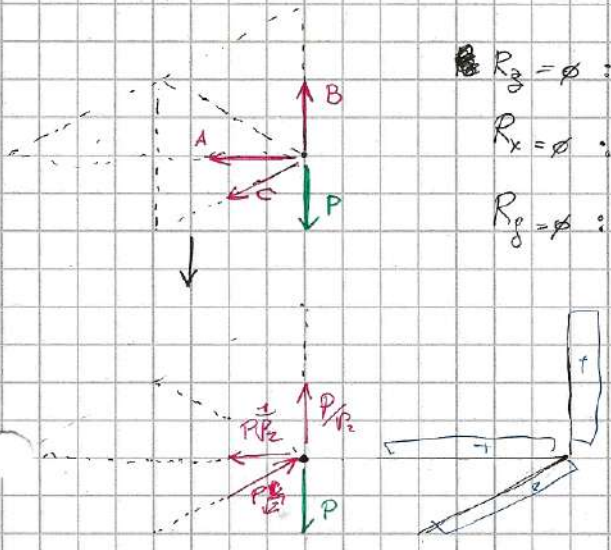


3 eq $\quad \bar{R} = \emptyset$

3 eq $\quad \bar{M} = \emptyset$ ⟹ 1 eq è inutile

In 3D, la bilia può ruotare in 2D, tramite solo forze ortogonali

Consideriamo il Perno D:

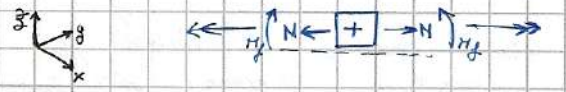


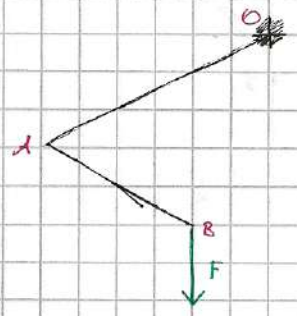
$R_z = \emptyset : \quad P + C\frac{\sqrt{2}}{2} = \emptyset \rightarrow C = -P\frac{2}{\sqrt{2}}$

$R_x = \emptyset : \quad B\frac{\sqrt{2}}{2} - A\frac{\sqrt{2}}{2} = \emptyset \rightarrow B = A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$R_y = \emptyset : \quad C\frac{\sqrt{2}}{2} + A\frac{\sqrt{2}}{2} + B\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow A = -C\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow A = P\frac{1}{\sqrt{2}}$

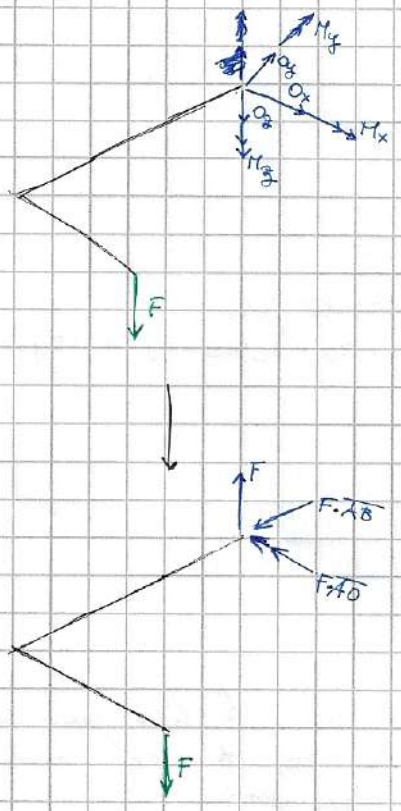
Esercizio esempio ②:





. Per risolvere questo esercizio ci sono due possibili strade:

1) Calcolo delle reazioni vincolari:



$R_y = \phi$: $O_y = \phi$

$R_x = \phi$: $O_x = \phi$

$R_z = \phi$: $O_z + F = \phi \rightarrow O_z = -F$

$M_{zR_o} = \phi$: $M_z = \phi$

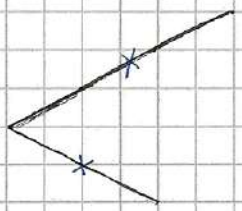
$M_{yR_o} = \phi$: $M_y + F \cdot \overline{AB} = \phi \rightarrow M_y = -F \cdot \overline{AB}$

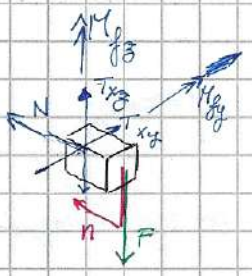
$M_{xR_o} = \phi$: $M_x - F \cdot \overline{AO} \rightarrow M_x = F \cdot \overline{AO}$

"Il calcolo delle reazioni interne in questo caso è semplice. La geometria del problema ci permette di ignorare subito le azioni interne"

Per il calcolo delle azioni interne saranno necessari 4 grafici per rappresentare il risultato.

N





$T + F = \emptyset$

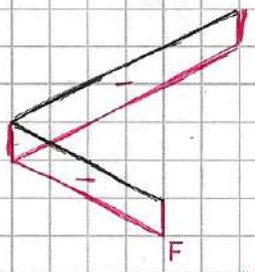
$T = -F$

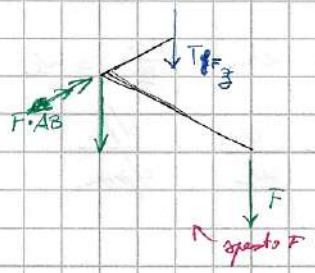
$M_{fy} + F_n = \emptyset$

$M_{fy} = -F_n$

T

Apriamo sotto





$T + F = \emptyset$

$T = -F$

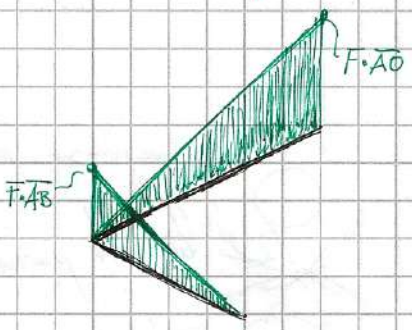
$M_T + F \cdot \overline{AB} = \emptyset$

$M_T = -F \cdot \overline{AB}$

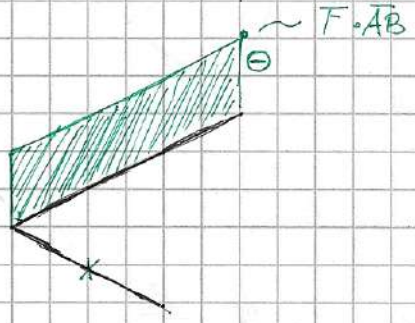
$M_{fx} - F_n = \emptyset$

$M_{fx} = F \cdot n$

M_F

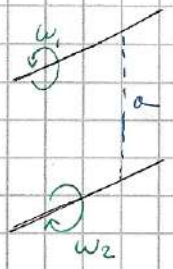


M_T



Alberi e cuscinetti

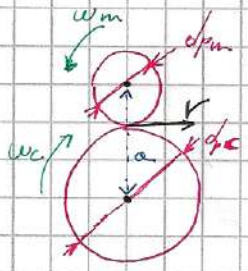
Consideriamo due alberi collegati da un moto relativo:



$$\omega = rad/s$$

a = distanza interassi

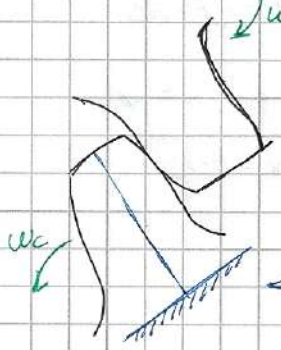
Portiamo due ruote senza denti a frizione:



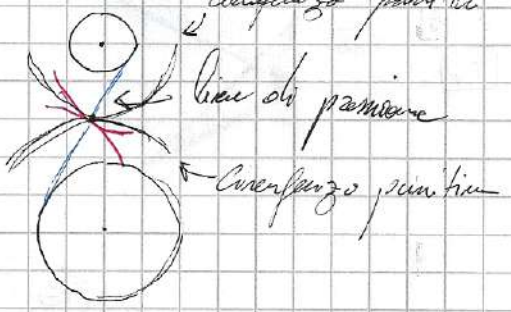
$$a = \frac{d_{pm}}{2} + \frac{d_{pc}}{2}$$

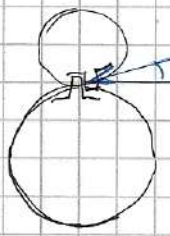
$$V = \omega_m \cdot \frac{d_{pm}}{2} = \omega_c \frac{d_{pc}}{2}$$

$$\rightarrow \frac{\omega_m}{\omega_c} = \frac{d_{pc}}{d_{pm}}$$



← cogniabile ad una trave incastrata





← forza riferita a xyz di terna

$$\text{Rapporto di trasmissione} = \frac{R}{T}$$

$\approx 20°$

Coppie

$$C_m = T \cdot \frac{d_{pm}}{2}$$

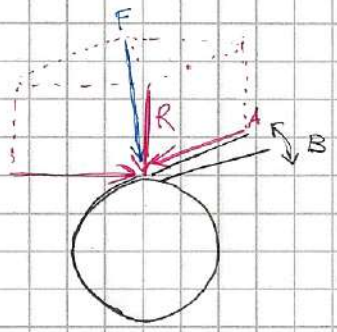
$$C_c = T \cdot \frac{d_{pc}}{2}$$

$$V = \omega_m \cdot \frac{d_{pm}}{2} = \omega_c \frac{d_{pc}}{2}$$

$$W = C_m \cdot \omega_m = C_c \cdot \omega_c$$

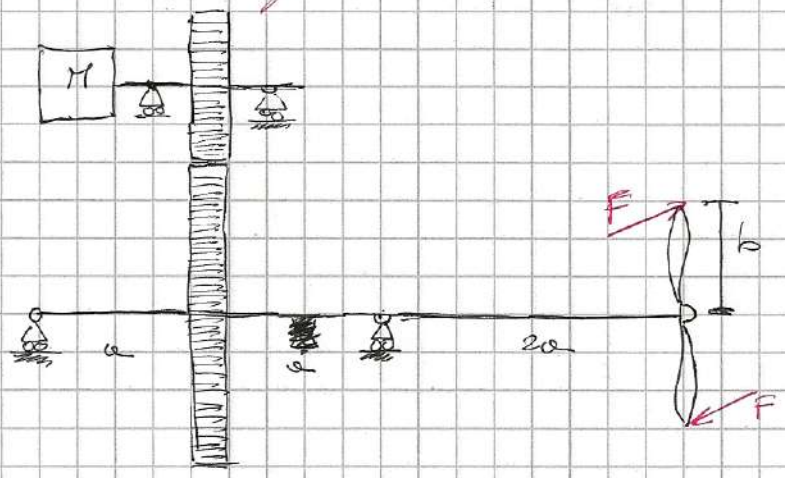
} eq fondamentali per denti dritti

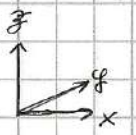
Schema delle forze di un profilo elicoidale



← Non vuole rotazione, tiene shift

Esercizio Esempio ⓪





ω_m, d_{pm}, W

$\alpha = 20° - 22°$

ω_c, d_{pc}

$\gamma = \frac{\omega_{modello}}{\omega_{motrice}}$

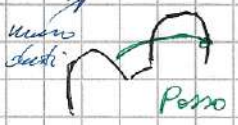
$\gamma < 1$ riduttore

$\gamma > 1$ moltiplicatore

$$V = \omega_m \cdot \frac{d_{pm}}{2} = \omega_c \cdot \frac{d_{pc}}{2}$$

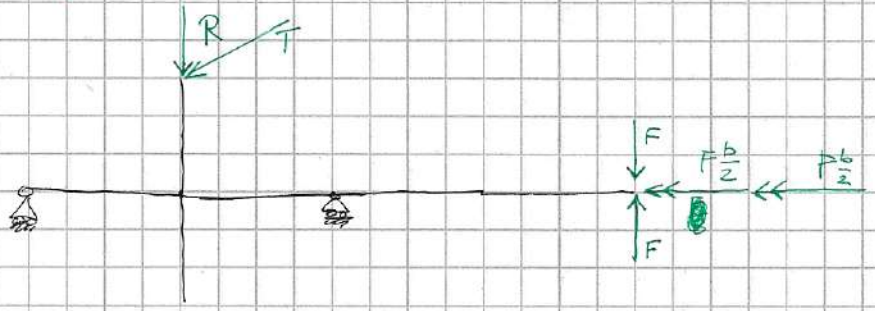
modello $m = \frac{d_p}{N} \rightarrow d_p = m \cdot N$

$$\frac{\omega_m}{\omega_c} = \frac{d_{pc}}{d_{pm}} = \frac{m \cdot N_c}{m \cdot N_m}$$



$P = \frac{\pi d_p}{N} = \pi m$

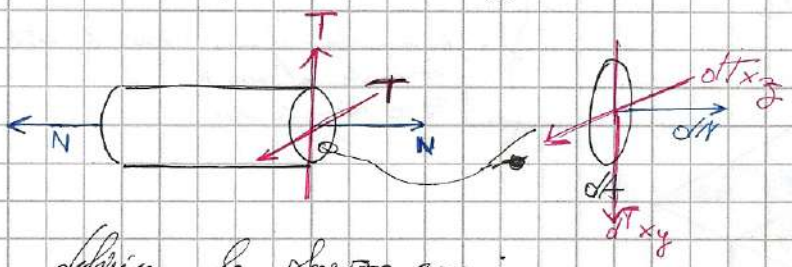
$\sum M_x = 0 : F \cdot b = T \frac{d_{pc}}{2} = 0$



	F	R, T
x, y, z	Rotanti	fisse
sezioni	fisse	rotante

Stato di Sforzo

Consideriamo un punto infinitesimo del corpo soggetto da un barra sollecitata a trazione



definiamo lo sforzo come:

$$\sigma = \lim_{dA \to 0} \frac{dN}{dA} \quad ! \quad \left[\frac{F}{L^2}\right]$$

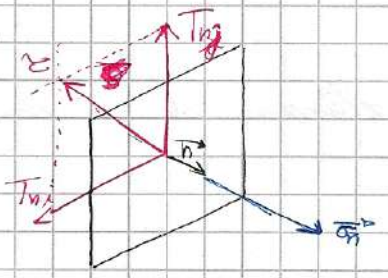
ed è diretto come la normale della superficie considerata

Sulla stessa area infinitesima dA possiamo anche definire:

- $\tau_{xz} = \lim_{dA \to 0} \frac{d T_{xz}}{dA}$

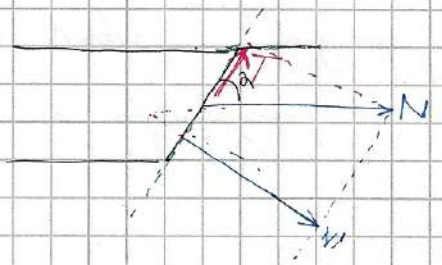
- $\tau_{xy} = \lim_{dA \to 0} \frac{d T_{xy}}{dA}$

Possiamo scegliere di considerare la generica superficie infinitesima, ottenendo anche:



$$\bar{S} = \bar{\sigma}_n + \bar{\tau}_n$$

Se io cambio il tagli della sezione, vengono cambiate le azioni normali e di taglio



$$N' = N \cos\alpha$$

$$T' = N \sin\alpha$$

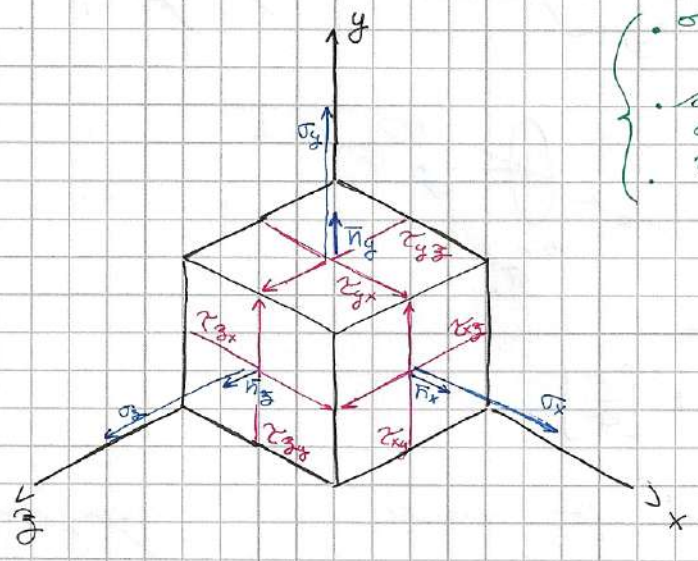
$$A' = A \cos\alpha$$

$$\sigma_x = \frac{N'}{A'} = \frac{N \cos\alpha}{A/\cos\alpha} = \sigma_x \cos^2\alpha$$

$$\tau_x = \frac{T'}{A'} = \sigma_x \sin\alpha \cos\alpha$$

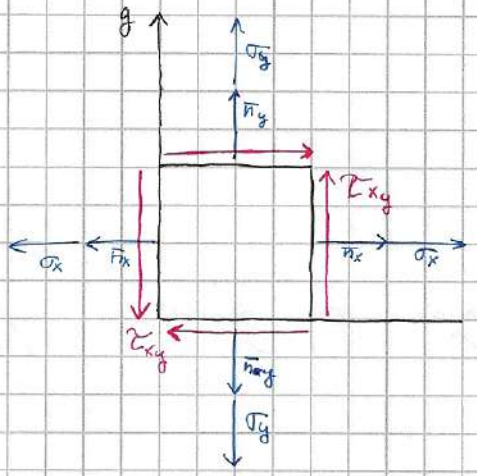
- Stati di sforzo: rappresentazione

3D



- σ + trazione $\vec{n}$
- τ coerente a quella di tutti gli altri casi
- τ + rispetto asse

2D



- Stati di sforzo: rappresentazione del tensore di 2° ordine

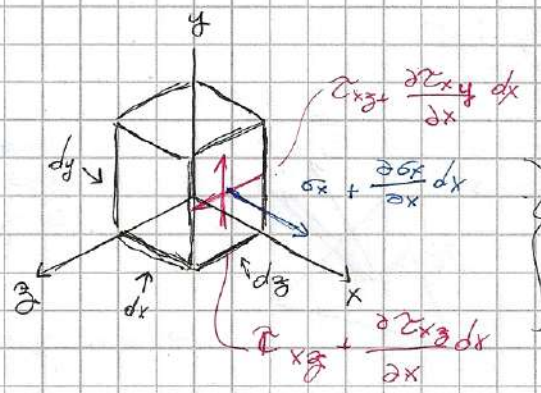
$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Quindi $\overline{\overline{\sigma}}$ è una funzione della posizione considerata (x, y, z)

Ora passo alla seconda dimensione e di conseguenza a tutte le altre

Generica $\bar{\sigma}(x,y,z)$

Serie di Taylor



$$\sigma_x(x+dx) = \sigma_x(x) + \left.\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right|_x dx$$

} ciò è valido per ogni faccia, con i relativi coordinate infinitesime.

Questo schema ci permette di ottenere 6 equazioni nello spazio 3D. Il bilancio si fa per le FORZE, quelli agenti sono SFORZI quindi dovremo passare dagli sforzi alle forze

$$R_x = 0: \quad \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dz\,dy - \sigma_x\,dy\,dz + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx\,dz + \longrightarrow$$

$$\longrightarrow + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) dx\,dy + f_x\,dx\,dy\,dz = 0$$

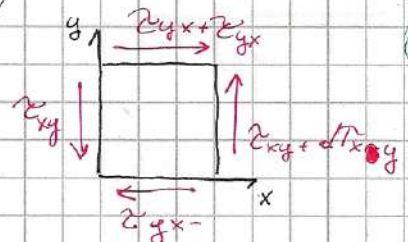
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z = 0$$

per come varia il vincente queste equazioni devono essere sempre soddisfatte

$M_z = 0$:



trascurabile

$$\left(\tau_{xy} + d\tau_{xy}\right) dy\,dz\,\frac{dx}{2} + \tau_{xy}\,dy\,dz\,\frac{dx}{2} -$$

$$\left(\left(\tau_{yx} + d\tau_{yx}\right) dx\,dz\,\frac{dy}{2} - \tau_{yx}\,dx\,dz\,\frac{dy}{2} = 0\right.$$

$$\tau_{xy}\,dx\,dy\,dz - \tau_{yx}\,dx\,y\,dz = 0$$

$$\hookrightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

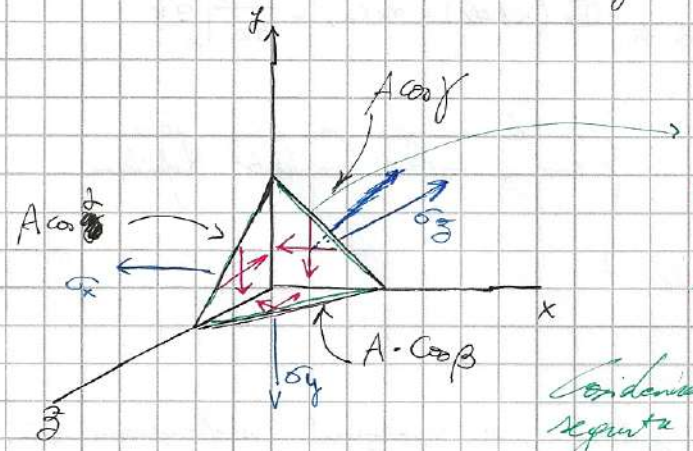
$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} \end{cases}$$

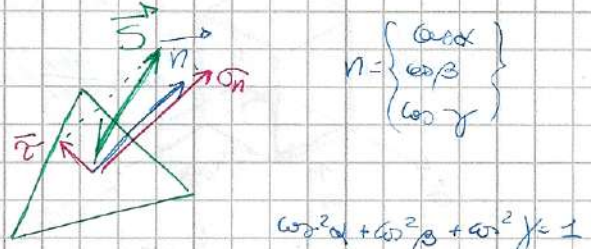
← Il tensore degli sforzi è simmetrico!!!

Abbiamo quindi tensore di sole 6 equazioni per definire il tensori degli sforzi anziché 9

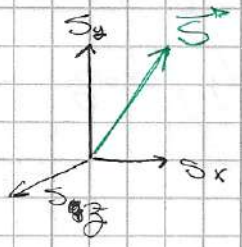
Dimostriamo che tra piani perpendicolari tra di loro è sempre possibile tutto ciò / che / avviene nell'intorno di un punto

Consideriamo il tetraedro di Cauchy:





Consideriamo il vettore $\vec{S}$ nella seguente rappresentazione



Questo vuol è possibile per un punto. Se tutto il volume è in equilibrio allora anche questo punto è in equilibrio

~~[illegible]~~

$$\begin{cases} \cos\alpha = i \\ \cos\beta = l \\ \cos\gamma = \end{cases}$$

$$S_x \cdot A - \sigma_x \cdot A \cdot i - \tau_{yx} \cdot A \cdot l - \tau_{zx} A \cdot m = \phi$$
$$S_y \cdot A - \sigma_y \cdot A l - \tau_{xy} A \cdot i - \tau_{zy} \cdot A \cdot m = \phi$$
$$S_z \cdot A - \sigma_z \cdot A \cdot m - \tau_{yz} A \cdot l - \tau_{xz} \cdot A i = \phi$$

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} = \vec{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i \\ l \\ m \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{S} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{S} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} \quad / \qquad \vec{\sigma_n} = (\vec{n} \cdot \vec{S})\,\vec{n}$$
$$\vec{\tau} = \vec{S} - \vec{\sigma_n}$$

Con formulette che ripeto:

$$\vec{S} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n}$$
$$\vec{\sigma_n} = (\vec{n} \cdot \vec{S})\,\vec{n}$$
$$\vec{\tau} = \vec{S} - \vec{\sigma_n}$$

Sforzi principali e Direzioni principali

Trovare un piano che rispetti questa condizione:

$$\vec{\tau} = \phi$$

Se la condizione è verificata $\rightarrow \vec{S} \parallel \vec{n}$. Definiamo questo il vettore $\vec{S}$ che troviamo imponendo la condizione S_p (sforzo principale). Di conseguenza

$$\vec{S_p} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n_p} = \sigma_p \cdot \vec{n_p} = \sigma_p \cdot \bar{\bar{I}} \cdot \vec{n_p} \Longrightarrow$$

(matrice identità)

$$\Longrightarrow \left(\bar{\bar{\sigma}} - \bar{\bar{\sigma_p}} \cdot I_p\right) \vec{n_p} = \phi \quad \leftarrow \text{Problema agli autovettori e autovalori}$$

↳ σ_p Autovalori

$\vec{n_p}$ Autovettori

↳ $\det \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_p & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_p \end{vmatrix} = \phi \Longrightarrow \sigma_p^3 - I_1 \sigma_p^2 - I_2 \sigma_p - I_3 \Longrightarrow$

Invarianti: $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$I_2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz} - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)$

$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{xz}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)$

$\Longrightarrow \sigma_{p_1}, \sigma_{p_2}, \sigma_{p_3} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \boxed{\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}}$

Facendo i vari σ_p:

$\sigma_I \rightarrow \vec{n_I}$

$\sigma_{II} \rightarrow \vec{n_{II}}$

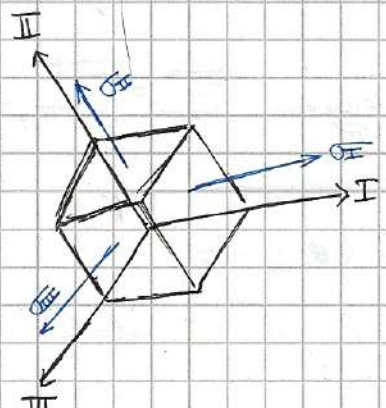
$\sigma_{III} \rightarrow \vec{n_{III}}$

} Due questi tre vettori, essendo perpendicolari tra loro, posso identificare un nuovo sistema di riferimento.

↳ $\left(\bar{\bar{\sigma}} - \sigma_I \cdot \bar{\bar{I}}\right) \vec{n_I} = \phi$

+

↳ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$



→ Il primo passo è trovare il sistema di riferimento in cui le τ si annullano.

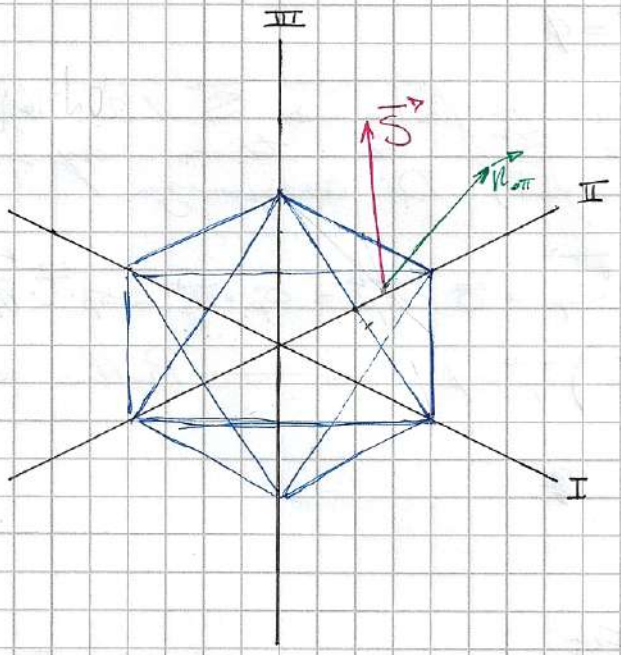
→ Il secondo passo è trovare il sistema di riferimento in cui le τ sono massime

→ Può essere richiesto l'impostazione del calcolo delle τ OTTAEDRALI

↳ $\tau_{OTT} \Longrightarrow$

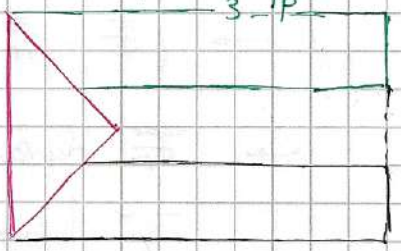
Calcolo dello τ OTTAEDRALE

Consideriamo il seguente sistema di riferimento principale



$\vec{n}_{o\pi}$ = equidistante dai 3 assi principali

$$\vec{n}_{o\pi} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$



In generale posso dire che un generico $\vec{n} = \left\{ \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$ può ~~essere~~ essere espresso con 8 diverse collinearità (contando i segni)

Possiamo quindi anche definire una generica natura $\vec{S}_{o\pi}$:

$$\vec{S}_{o\pi,P} = \overline{\overline{\sigma}}_P \cdot \vec{n}_{o\pi,P}$$

Quindi, in conclusione:

$$\vec{\sigma}_{n,o\pi_P} = \left(\vec{n}_{o\pi} \cdot \vec{S}_{o\pi,P}\right)\vec{n}_{o\pi}$$

La modulo:

$$|\sigma_{n,o\pi,P}| = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}$$

Posso calcolare poi lo $\tau_{o\pi}$ con la relazione $\vec{\tau}_{o\pi} = \vec{S}_{o\pi,P} - \vec{\sigma}_{n,o\pi,P}$, ottenendo:

$$|\tau_{o\pi}| = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

Queste grandezze vengono ripprese in seguito per il calcolo dei carichi statici

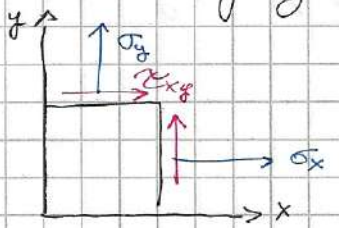
Cerchio di Mohr

↳ Metodo grafico che permette il calcolo [illegible] di:

- σ_p, n_p
- τ_{max}

È possibile utilizzarlo in uno stato di sforzo piano / deformazione piana

→ Stato di sforzo piano:



← ① Vigono negli altri nel dominio esterno

← ② Rappresentabile in 2D

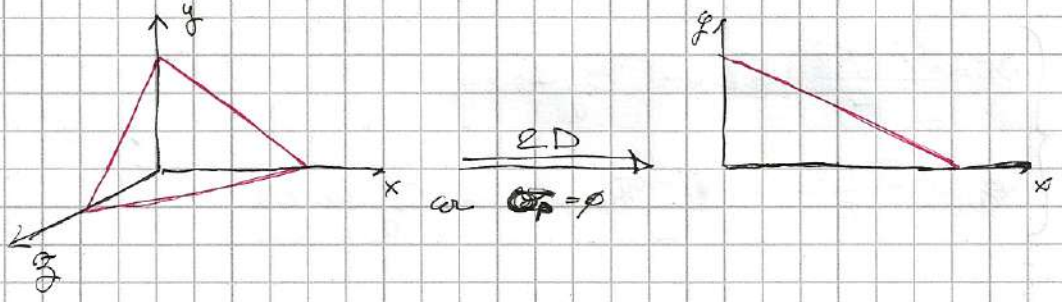
← ③ Il terzo piano z è sorico:

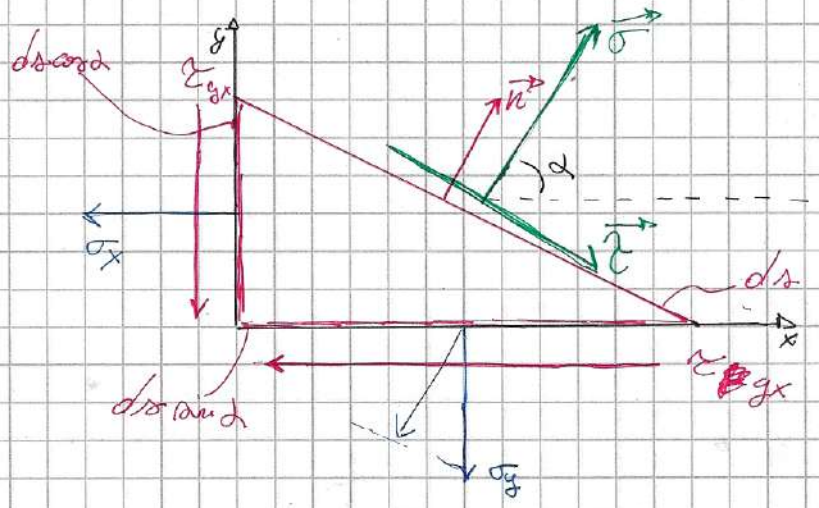
$\vec{S}_{(n_z)} = \emptyset \rightarrow \tau = \emptyset$

Nello stato di sforzo piano per la proprietà ③ il piano con normale z è un piano principale che ha sforzo principale $\sigma_p = \emptyset$

→ L'obiettivo è trovare il piano su cui agisce lo τ_{max} e il suo modulo $|\tau_{max}|$

. Consideriamo il Tetraedro di Cauchy e consideriamo il caso particolare in cui per ③ l'asse z è sorico:





Applichiamo alla figura precedente, una volta espliciate le nuove ipotesi, le equazioni di equilibrio.

1) $R_\sigma = 0 \Rightarrow \sigma \cdot ds - \sigma_y ds \cdot \sin^2\alpha - \tau_{yx} \cdot ds \cdot \sin\alpha\cos\alpha - \sigma_x ds \cos^2\alpha - \tau_{xy} ds \cos\alpha \sin\alpha = 0$

- $2\tau_{xy} \sin\alpha\cos\alpha = \tau_{xy} \cdot \sin 2\alpha$
- $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$
- $\sigma = \sigma_y \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos^2\alpha}{2}\right) - \sigma_x \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\alpha}{2}\right) + \tau_{xy} \sin 2\alpha =$

Equazione 1:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

2) $R_\tau = 0$:

$$\tau ds + \sigma_y ds \sin\alpha \cos\alpha - \tau_{xy} ds \sin^2\alpha - \sigma_x ds \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \tau_{xy} ds \cos^2\alpha = 0$$

(D) pesi sono uguali a (1)

Equazione 2:

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Le seguenti equazioni quindi ci dicono come variano τ e σ al variare dell'angolo di rotazione del piano che contiene l'asse z perpendicolare al piano xy

$$\begin{cases} \tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha & (1) \\ \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha & (2) \end{cases}$$

Deriviamo le due espressioni per trovare i massimi e minimi di σ e τ

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = 2 - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

α_p = angolo di rotazione principale

$$\rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \begin{cases} 2\alpha_p \rightarrow \alpha_p \\ 2\alpha_p + \pi \rightarrow \alpha_p + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Confrontiamo $\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0 \xrightarrow{(1)} \tau = 0$ → i piani dove non ci sono tensioni tangenziali sono contenuti le σ e le τ massime per questioni prima tra gli infiniti da ottimo e disposizione

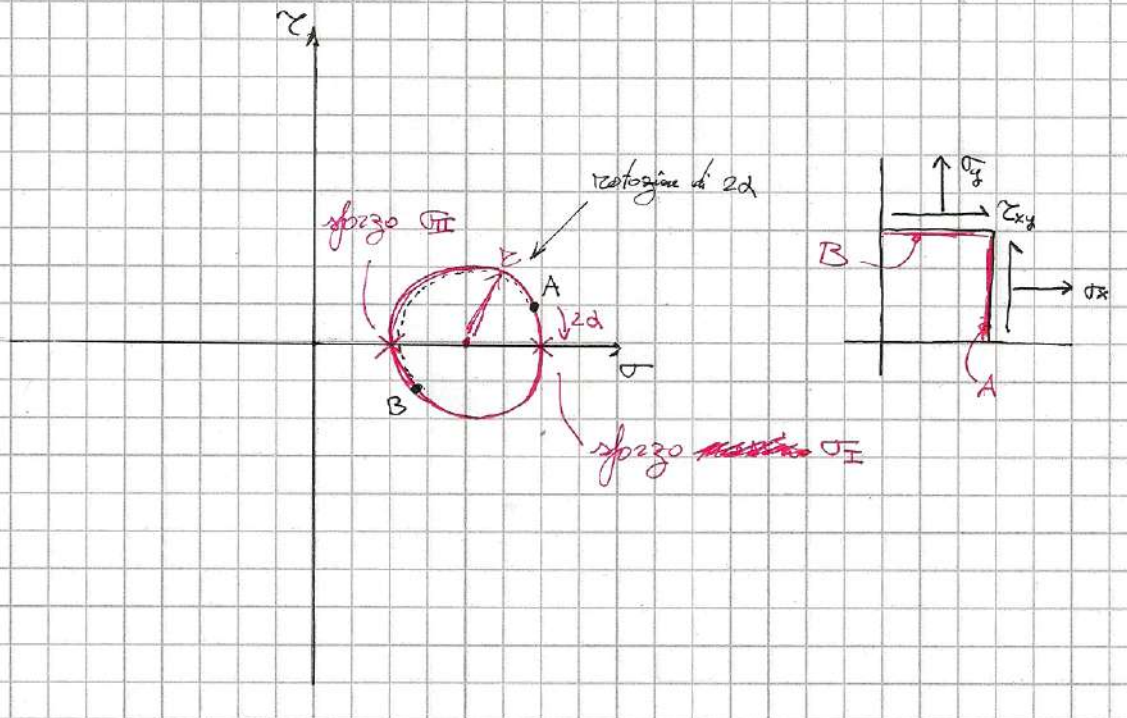
$$\frac{d\tau}{d\alpha} = 2\,\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0$$

$$\rightarrow \tan 2\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{1}{\tan 2\alpha} \rightarrow$$ I piani sono contenuti τ e sono distanziati di $\frac{\pi}{4}$ del piano delle σ massime

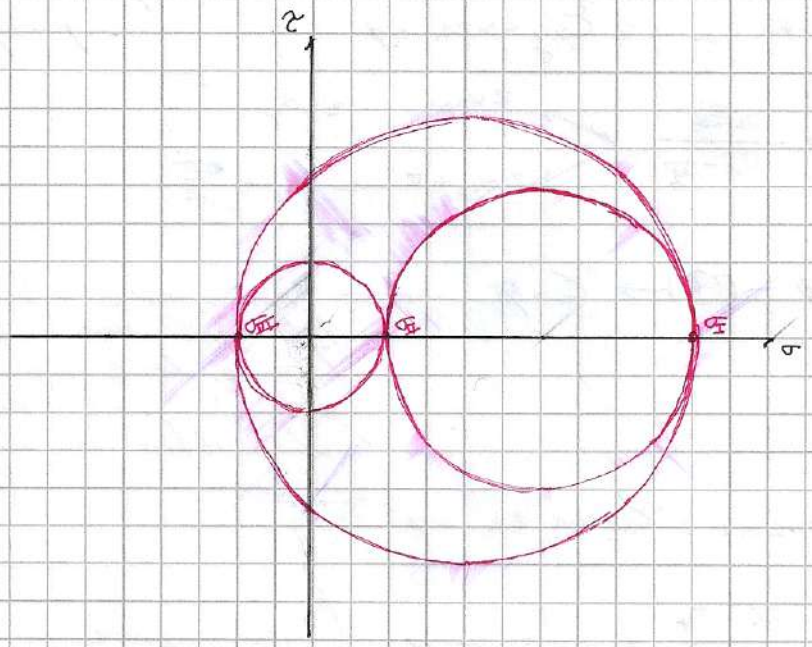
$$\alpha_\tau = \alpha_p + \frac{\pi}{4}$$

Eseguiamo ora la seguente operazione

$$\left.\begin{matrix} (1)^2 \\ + \\ (2)^2 \end{matrix}\right\} \quad \left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$



Un esempio di diagramma dei carichi di Mohr simile è questo



La rotazione del provino intorno viene fatta attorno all'asse in corrispondenza di una delle circonferenze.
Ogni cerchio rappresenta tutti i possibili stati in cui si possono trovare due facce oggetto ed una terza fermi

Stato di Deformazione

Finora abbiamo fatto spesso l'ipotesi di corpo rigido, ovvero che il corpo non si deformasse quando era sottoposto a carico esterno.

In effetti, osservando una trave e/o un elemento:



possiamo dire che il vettore generico spostamento $\vec{u}$ è funzione (nel caso più generale possibile) di x, y, e z.

Questi spostamenti danno un'idea della rigidezza della struttura.

Quindi vettore $\vec{u}$ è così definito:

$$\vec{u}(x,y,z) = \begin{cases} u(x,y,z) : x \\ v(x,y,z) : y \\ w(x,y,z) : z \end{cases}$$

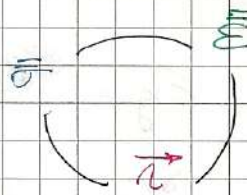
Analogo al tensore degli sforzi $\bar{\bar{\sigma}}$ esiste il tensore delle deformazioni $\bar{\bar{\varepsilon}}$.

Considerando un provino sottoposto a trazione:

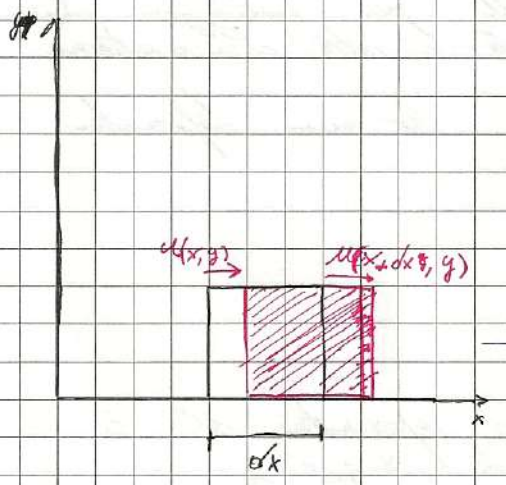


Possiamo definire la deformazione ingegneristica come $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ $\left[\%\right]\left[\frac{\epsilon}{\epsilon}\right]$

Il nostro obiettivo è trovare un modo di legare tra loro le seguenti proprietà:



Per definizione, consideriamo il nostro cubetto infinitesimo in un piano 2D sottoposto ad una tensione σ_x

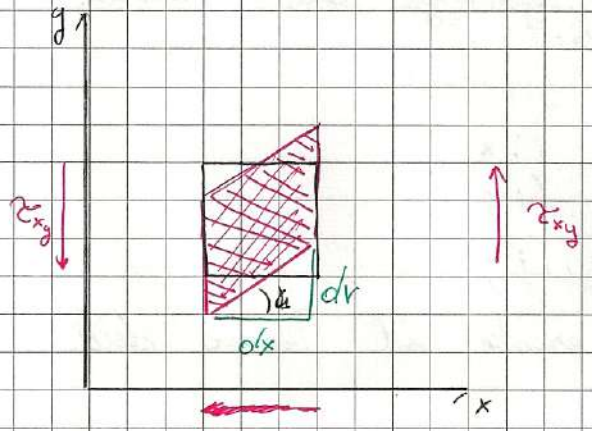


$$\rightarrow du = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x dx$$

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$



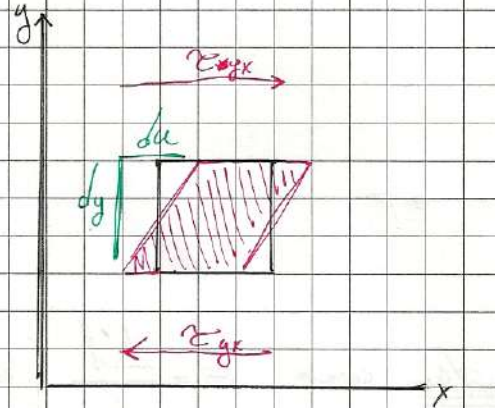
$$\rightarrow dv = \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_x dx$$

$$\tan\gamma_1 \simeq \gamma_1 = \frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon_{xy}$$

$\lim_{\Delta x \to 0}$

Per coerenza di notazione scriviamo anche in questo modo:

$$\tan\gamma_2 \simeq \alpha_2 = \frac{du}{dy} = \varepsilon_{yx}$$



- Poiché $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ e $dx = dy$ allora:

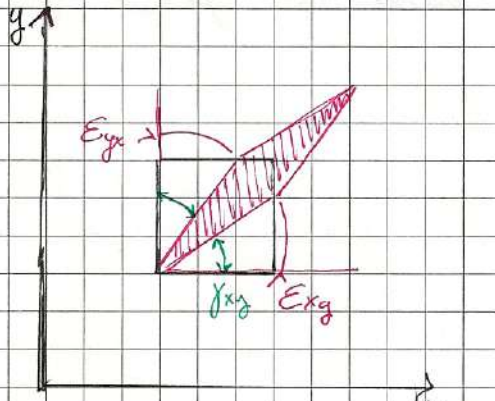
$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$$

e quindi posso dimostrare avere un deformazione tale

$$\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx} = 2\varepsilon_{xy}$$

e quindi:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$



$$\rightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ne consegue che per le altre 2 possibili coppie delle variabili y:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

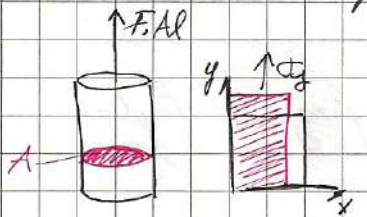
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

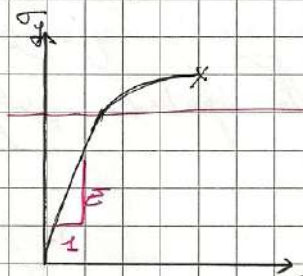
A loro volta possiamo scrivere il tensore delle deformazioni:

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Avendo definito il legame tra deformazione e spostamento possiamo definire quello tra deformazione e sforzo. Esso avviene tramite il cosiddetto legame costitutivo del materiale.

Consideriamo una prova di trazione su un provino:





Noi lavoreremo nella sezione di deformazione plastica.
Sarà sempre di tipo elastico e lineare

$$\sigma_y = \frac{F}{A}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l}{l}$$
} Ipotesi ingegneristiche

E: Modello di Young (perdita della curva elastica) (elasticità)

Quindi possiamo definire sperimentalmente che

$$E = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y} \longrightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon$$

Applicando una tensione però, ovvero una deformazione su tutti gli assi del corpo e non solo su quello parallelo alla deformazione. Per quantificare gli altri, introduciamo il coefficiente di Poisson.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l}$$

deformazione trasversale

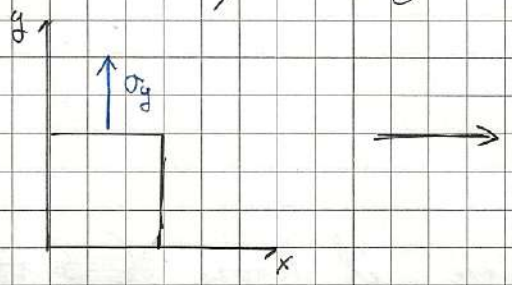
deformazione longitudinale

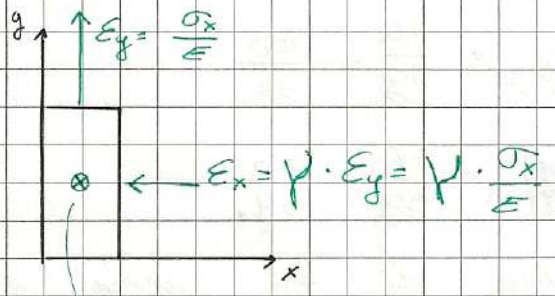
ma se scrivo così ricordo che è lungo z

ν

→ Esempio ①: deformazioni prevalentemente

Consideriamo un cubetto sottoposto a trazione:





$$\varepsilon_z = \nu \cdot \varepsilon_y = \frac{\sigma_x}{E}$$

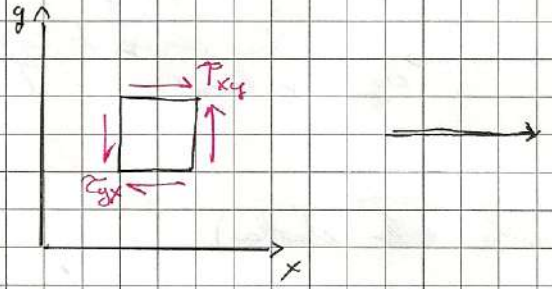
Possiamo definire il tensore $\bar{\bar{\sigma}}$ e $\bar{\bar{\varepsilon}}$:

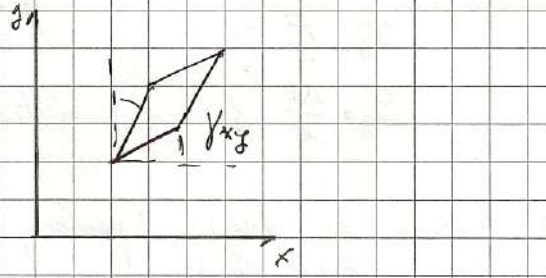
$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_y & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_y/E & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & -\nu \cdot \sigma_y/E \end{bmatrix}$$

→ Esempio ②: deformazioni tangenziali

Consideriamo un cubetto sottoposto a forze di taglio





Definiamo G come il "Modulo di elasticità tangenziale". Allora:

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

Riassunto:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l}$$

$$\tau_{ij} = G \cdot \gamma_{ij}$$

Ipotizzando l'isotropia e omogeneità del materiale in esame, possiamo dire che:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \qquad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \qquad \tau_{yz} = G\,\gamma_{yz}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \qquad \tau_{zx} = G\,\gamma_{zx}$$

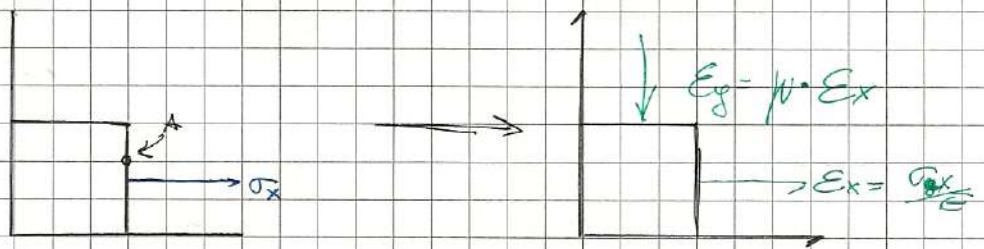
Riscriviamo questa serie di equazioni in forma matriciale:

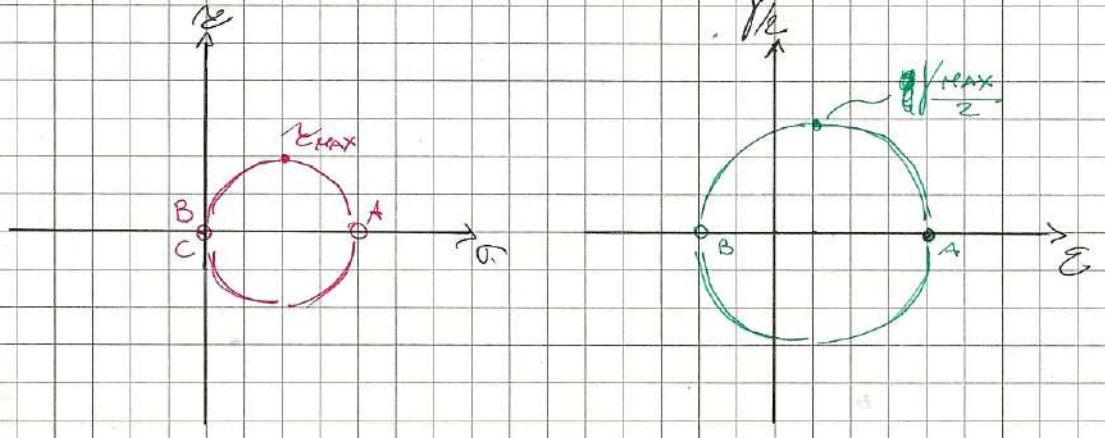
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice elastica}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\left(E = \frac{\sigma}{\varepsilon}\left[\frac{N/mm^2}{-}\right]\right)$$

→ Esempio ③: Applicazione della deformazione unita e cerchi di Mohr

Consideriamo un cubetto elementare sottoposto a trazione:





Calcolo τ_{max} e $\gamma_{1/2\,MAX}$:

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\frac{\gamma_{max}}{2} = \frac{\varepsilon_x - (-\nu\varepsilon_x)}{2} = \frac{\varepsilon_x(1+\nu)}{2} = \frac{\sigma_x}{E}\cdot\frac{1+\nu}{2}$$

$$G = \frac{\tau_{max}}{\gamma_{max}} = \frac{\sigma_x}{2}\cdot\frac{E}{\sigma_x(1+\nu)} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Geometria delle aree

Abbiamo fino ad ora considerato le azioni delle forze del corpo rigido come puntiformi. Ciò è una grande approssimazione.

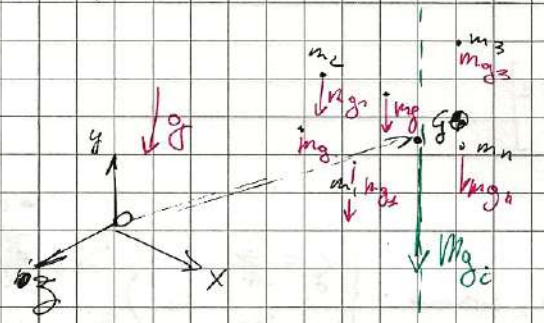
Adesso studieremo lo sforzo relativo alle forze in particolare ai momenti:

- Baricentro
- Momenti statici
- Momenti di inerzia

→ Baricentro

Definizione: "Punto dell'area di massa o centro di proprietà"

Immagino il seguente sistema soggetto a gravità:



- Il baricentro è un punto di azione (in questo caso) in cui agisce la risultante delle forze.
- In generale posso definire un punto da cui posto il vettore di un qualsiasi grandezza, indicato con G e il risultato ⊕ o ⊕

- Il vettore $\overline{OG} = \frac{\sum_i (P_i - O) \cdot P_i}{P_{TOT}}$ ovvero la media pesata della distanza della massa rispetto al suo valore.

$$\overline{OG} = \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum x_i m_i}{m_{TOT}} \\ \frac{\sum y_i m_i}{m_{TOT}} \\ \frac{\sum z_i m_i}{m_{TOT}} \end{bmatrix}$$

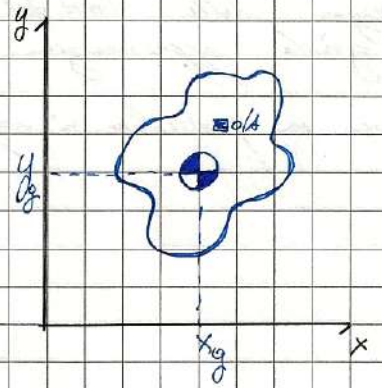
- Questo è un insieme di punti discreti.

Per un corpo rigido CONTINUO (ipotizzato omogeneo) dovremo porre ad una definizione infinitesima siccome:

- $dm_i = dV_i \cdot \rho$

$$\longrightarrow (\overline{G - O}) = \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\int x \cdot \rho \, dV}{\rho V_{TOT}} \\ \frac{\int y \rho \, dV}{\rho V_{TOT}} \\ \frac{\int z \rho \, dV}{\rho V_{TOT}} \end{bmatrix}$$

Concentriamoci sulle Aree dove andremo a considerare un dA:



$$\circ(\overline{G-O}) = \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A \frac{x\,dA}{A_{TOT}} \\ \int_A \frac{x\,dA}{A_{TOT}} \end{bmatrix}$$

→ Momento statico: (o del primo ordine)

Sempre considerando il caso 2D (ricordo stiamo lavorando con delle sezioni di travi), definiamo il momento statico come:

$$S_x \triangleq \int_A \bullet_g \, dA \qquad [l^3]$$

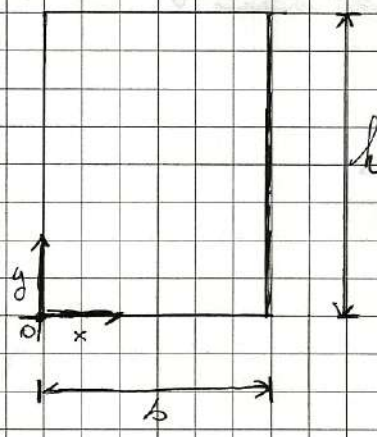
$$S_y \triangleq \int_A x\,dA$$

e ne segue che, relativamente al baricentro, avremo: $\begin{cases} x_g = \frac{S_x}{A} \\ y_g = \frac{S_x}{A} \end{cases}$ e $\begin{cases} S_x = \bullet_g \cdot A \\ S_y = x_g \cdot A \end{cases}$

La sua definizione implica avere forte dipendenza dal sistema di riferimento considerato.

Esempio ②: Calcolo del momento statico per una sezione.

Consideriamo la sezione:



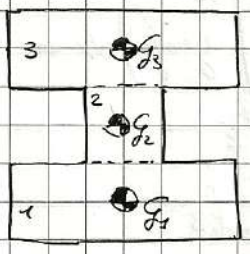
$S_x = ?$

$S_x = ?$

$$S_y = \int_A x\,dA = \int_0^h \left(\int_0^b x\,dx \right) dy = \int_0^h \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b dy = \frac{b^2}{2} h$$

$$S_x = \int_A y\,dA = \int_0^h \left(\int_0^b y\,dx \right) dy = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

Esempio ②: Calcolo del momento statico per una sezione composta



$$S_x = S_{x1} + S_{x2} + S_{x3} = y_{G_1} A_1 + y_{G_2} A_2 + y_{G_3} A_3$$

$$x_{G_{TOT}} = \frac{y_{G_1} A_1 + y_{G_2} A_2 + y_{G_3} \cdot A_3}{A_{TOT}}$$

$$x_G = \frac{\sum x_{G_i} A_i}{A_{TOT}}$$

Ider per S_y e $y_{G_{TOT}}$ $\quad y_G = \frac{\sum y_{G_i} A_i}{A_{TOT}}$

→ Momento di inerzia (II ordine)

- $J_y = \int_A x^2 dx \quad [l^4]$
- $J_x = \int_A y^2 dx \quad [l^4]$

• Sono sempre maggiori di zero

• Momento di inerzia centrifugo:

$$J_{xy} = \int_A x_G \, dA$$

può essere negativo

↳ Momento di inerzia centrifugo:

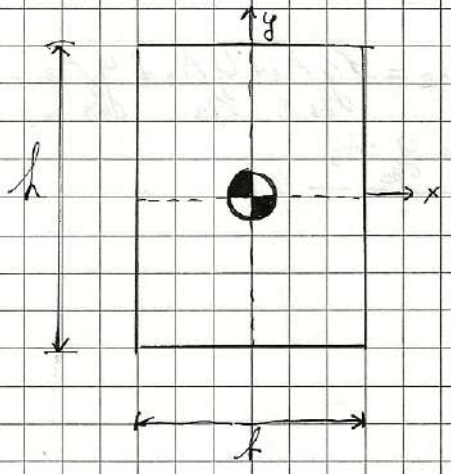
$$J_{xy} = \int_A x_G \cdot A \quad \text{(può essere negativo)}$$

↳ Momento d'inerzia polare:

$$J_P = \int_A r^2 dA \;, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

quindi $J_P = J_y + J_x$

Esempio ③: Calcolo momenti di inerzia per una regione



- $J_x = \int_A y^2 \, dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \, dy \right) dx =$

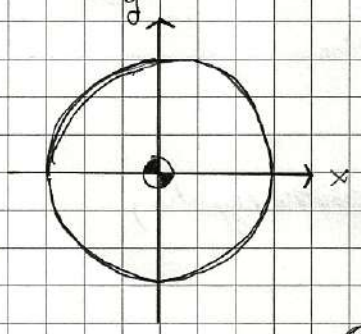
$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{1}{3} \frac{h^3}{4} \, dx = \frac{1}{12} b \cdot h^3$

- $J_y = \int_A x^2 \, dA = \frac{1}{12} b^3 h$

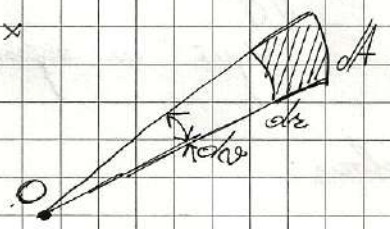
- $J_P = J_x + J_y = \frac{1}{12} b h^3 + \frac{1}{12} b^3 h$

- $J_{xy} = 0$

Esempio ④: Calcolo momento di inerzia per una regione circolare



- $J_P = \int_A r^2 \, dA$



$\rightarrow dA = dr \cdot r \, d\theta \rightarrow$

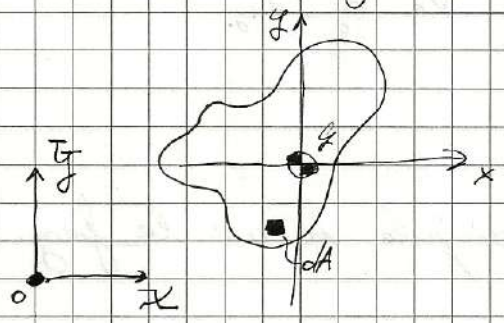
$\rightarrow J_P = \int_A r^2 \, dA = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cdot r \, d\theta \right) dr = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r^3 \, d\theta \right) dr =$

$= \int_0^R 2\pi r^3 \, dr = \pi \frac{R^4}{2} = \pi \frac{D^4}{32}$

$J_x + J_y = J_P \rightarrow J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}$

Esempio ⑤: Calcolo momento di inerzia di un sistema di riferimento non baricentrico.

- Consideriamo una generica sezione:



$J_x = ?$

$J_y = ?$

$x = x_G + x$ — $y = y_G + y$

$J_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y_G + y)^2 dA$

$J_x = \int_A y_G^2 dA + 2\int_A y_G \cdot y\, dA + \int_A y^2 dA = *$

Il momento statico è nullo perché l'asse è baricentrico

II: $2 y_G \int_A y\, dA = 2 y_G S_x = 0$

$* = J_x + y_G \cdot \int_A dA = J_x + y_G^2 \cdot A$ → segue > 0

Analogamente:

- $J_y = J_y + x_G^2 \cdot A$ → segue > 0

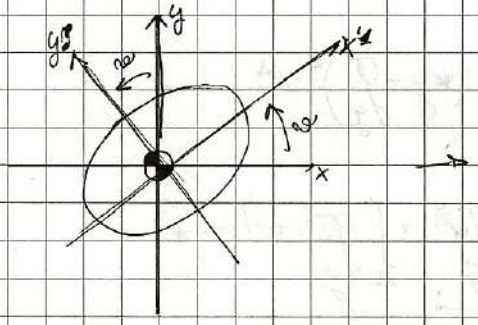
- $J_{xy} = \int_A x y\, dA = \int_A x_G y_G\, dA + \int_A x y\, dA = J_{x_G y_G} + x_G y_G \cdot A$

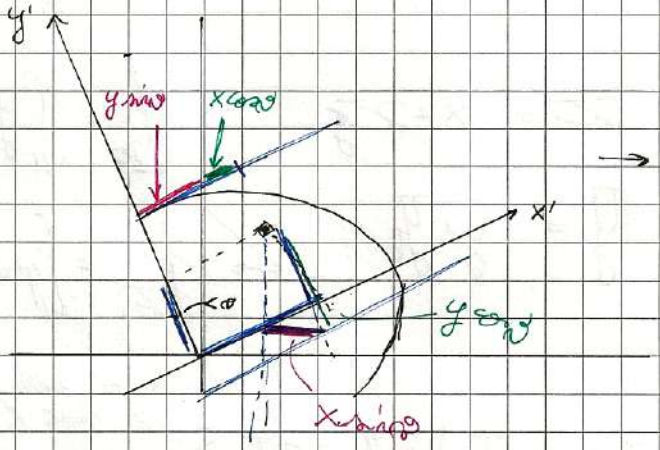
Momenti principali d'inerzia:

Siccome esistono tre momenti di inerzia J_x, J_y e J_{xy}, possiamo rappresentarli in un tensore simmetrico

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} \\ J_{yx} & J_y \end{bmatrix}$$

Possiamo definire un sistema di riferimento principale in cui le forze di inerzia centrifughe $J_{xy} = 0$





$$\rightarrow \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = y\cos\theta - x\cos\theta \end{cases}$$

In forma matriciale posso scrivere questo mio sistema di riferimento come:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Passando ai momenti di inerzia scriviamo:

$$\cdot\ J_{x'} = \int_A y^2\,dA = \int_A (y\cos\theta - x\sin\theta)^2\,dA = \int_A y^2\cos^2\theta\,dA + \int_A xy\sin\theta\cos\theta\,dA + \int_A x^2\sin^2\theta\,dA =$$

$$= \cos^2\theta\, J_x + \sin^2\theta\, J_y - 2\cos\theta\sin\theta\, J_{xy}$$

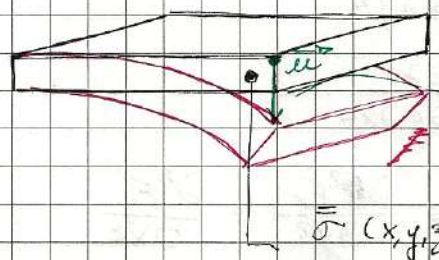
$$\cdot\ J_{y'} = \sin^2\theta\, J_x + \cos^2\theta\, J_y + 2\cos\theta\sin\theta\, J_{xy}$$

$$\cdot\ J_{x'y'} = (J_x - J_y)\cos\theta\sin\theta + J_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$\exists\theta : J_{x'y'} = 0 \rightarrow$ Sistema principale d'inerzia

Azioni interne

Il nostro obiettivo ora sarà quello di capire come il corpo reagisce alle sollecitazioni, cercando in primo luogo di capire come l'oggetto si deforma



$\vec{u}(x,y,z) \rightarrow$ Rigidezza

$\bar{\bar{\sigma}}(x,y,z)$

$\bar{\bar{\varepsilon}}(x,y,z)$

Dovremo quindi sempre determinare per ogni problema la deformazione, per ogni punto dell'oggetto presa in esame $\vec{u}$, $\bar{\bar{\varepsilon}}$, $\bar{\bar{\sigma}}$

Per ora abbiamo visto:

- Eq. indefinite di equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z = 0$$

Resta da dimostrare, perché condizione, nella risoluzione delle altre variabili

- Eq di compatibilità

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

In fine abbiamo le

- Espressioni costitutive

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

Tutto ciò, non ci garantisce che le equazioni siano congruenti, perciò dovremo introdurre le equazioni di congruenza:

- $\vec{E_g}$ di congruenza

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

Queste equazioni (se possono derivare altre) mi garantiscono che non ci sia lacerazione del materiale

Noi ci concentreremo nella risoluzione di TRAVI SNELLE, ovvero dove le seguenti ipotesi semplificative:

- Asse rettilineo
- Sezione costante
- Materiale omogeneo, isotropo, elastico-lineare
- Forze di volume sono nulle (peso)
- sufficientemente lontano da punti di applicazione delle forze
- Ci riferiamo al sistema di riferimento principale di inerzia della sezione

Questo è il problema elastico di De Saint Venant

Il primo approccio che vedremo segue:

$$\vec{\sigma} \rightarrow \vec{\varepsilon} \rightarrow \vec{u}$$

Poi seguiremo:

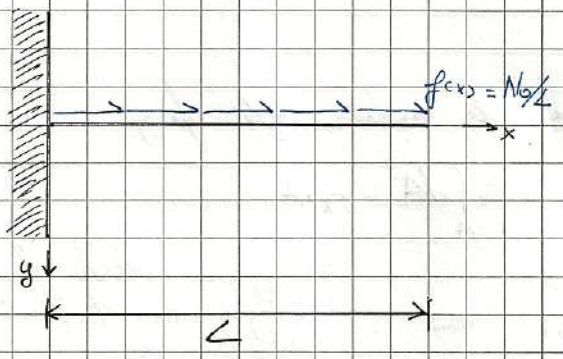
$$\vec{u} \rightarrow \vec{\varepsilon} \rightarrow \vec{\sigma}$$

Esercizio esempio ②: $\bar{\sigma} \rightarrow \bar{\varepsilon} \rightarrow \vec{u}$

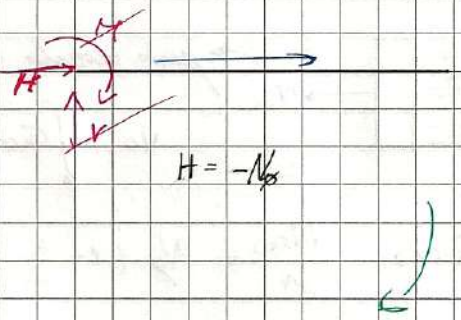
Consideriamo:

Risolviamo velocemente le azioni vista

1)



2)



3)

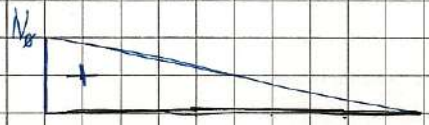
Generico punto di sezione:



$$N(x) \cdot + f(x) \cdot x - N_0 = 0$$

$$N(x) = N_0 - f(x)x = N_0\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Scriviamo le azioni interne:



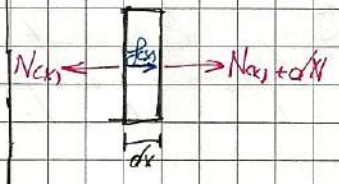
A questo punto possiamo iniziare a risolvere il problema della deformazione, sforzo ed spostamento:

$\bar{\bar{\sigma}}(x,y,z)$

$\bar{\bar{\varepsilon}}(x,y,z)$

$\vec{u}(x,y,z)$

- Siccome supponiamo che ogni piccolo pezzo infinitesimo deve stare all'equilibrio dinamico dice che:



$$N(x) + dN - N(x) + f(x)dx = 0$$

quindi:

$$-f(x) = \frac{dN}{dx}$$

Siccome l'azione è assiale, è ragionevole ammettere che lo sforzo è uniforme essendo rispetto alla sezione

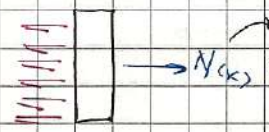


$$\sigma_x(x,y,z) = \sigma_x(x)$$

Quindi possiamo calcolare per questo sforzo:

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A} \rightarrow$$

→ questo perché:



→ passo vederlo con la somma degli sforzi:

$$N(x) = \int_A \sigma_x dA = \sigma_x \int_A dA = \sigma_x \cdot A$$

$$\rightarrow \quad \sigma_x(x) = \frac{N(x)}{A} = N_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)\frac{1}{A}$$ ← sollecitazione della funzione sforzo in tutta la nostra asta

- Quindi, ricordo la trave non è soggetta ad altri sforzi, il tensore degli sforzi sarà

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo ora dire le deformazioni:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y - \sigma_z)\right] = \frac{\sigma_x(x)}{E} = \frac{N_0}{E \cdot A}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Per effetto Poisson avremo anche una deformazione laterale:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = -\frac{\nu \cdot N_0}{EA}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Passiamo adesso allo spostamento:



$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow u = \int \varepsilon_x dx = u(x) = \int \frac{N_0}{EA}\left(1 - \frac{x}{L}\right) dx =$$

$$= \frac{N_0}{E \cdot A}\left(x - \frac{x^2}{2L}\right) + C_1$$

condizione a contorno

$$u(x=0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

↳ eq. di spostamento della trave punto per punto lungo x

$$\varepsilon_y(x,y,z) = \frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y}$$

$$v(x,y,z) = \int \varepsilon_y \cdot dy = \int -\frac{\nu N_0}{E \cdot A}\left(1 - \frac{x}{L}\right) dy = \frac{\nu N_0}{EA}\left(1 - \frac{x}{L}\right) y + C_2$$

condizione a contorno

$$v(\forall x, y=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

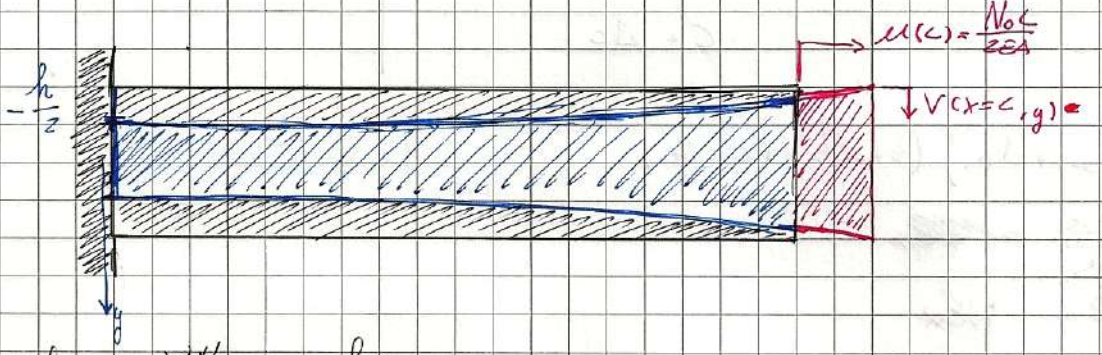
eq. di spostamento della trave punto per punto lungo y

Riassumo i risultati trovati:

$$u(x) = \frac{N_0}{E \cdot A}\left(x - \frac{x^2}{2L}\right)$$

$$v(x,y) = -\frac{\nu N_0}{EA}\left(1 - \frac{x}{L}\right)y$$

Rigorosamente giustificante i risultati:



$$v\left(0, -\frac{h}{2}\right) = -\frac{\nu N_0}{EA}(1)\left(-\frac{h}{2}\right)$$

Cosa interessa a noi:

→ Nei nostri esercizi avremo quasi sempre caso:

$$N(x) = N$$



$$\sigma_x = \frac{N_0}{A}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N_0}{EA} \xrightarrow{\int \varepsilon_x dx} u(x) = \frac{N_0}{EA}x + C_1$$

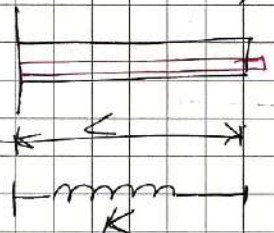
$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{N_0}{EA} \xrightarrow{\int \varepsilon_y dy} v(y) = -\nu\frac{N_0}{EA}y + C_2$$



← Soluzione per N all'estremità:

Rigidezza:

Tutte le travi possono essere considerate molle se le tiro allontano



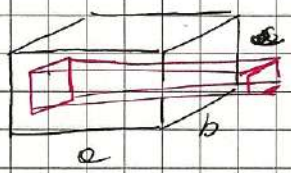
$$K = \frac{F}{\Delta l}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{\sigma}{E} \cdot l = \frac{F}{A}\frac{1}{E} l$$

$$K = \frac{F}{\Delta l} = \frac{F}{F \cdot l} AE = \frac{AE}{l}$$

$K \uparrow$ se $A \uparrow$, $E \uparrow$, $l \downarrow$

Volume di un cubo ossido



$\Delta V = V_{fin} - V_{in}$

$V_{in} = abc$

$a + \Delta a$

$b + \Delta b$

$c + \Delta c$

$$V_{fin} = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta a}{a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b} = -\nu \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta c}{c} = -\nu \varepsilon_x$$

$$V_{fin} = abc\,(1+\varepsilon_x)(1-\nu\varepsilon_x)(1-\nu\varepsilon_x) = V_{in}(1+\varepsilon_x)(1+\nu^2\varepsilon_x^2 - 2\nu\varepsilon_x)$$

Trascurabile

$$= V_{in}(1 - 2\nu\varepsilon_x + \varepsilon_x - 2\nu\varepsilon_x^2)$$

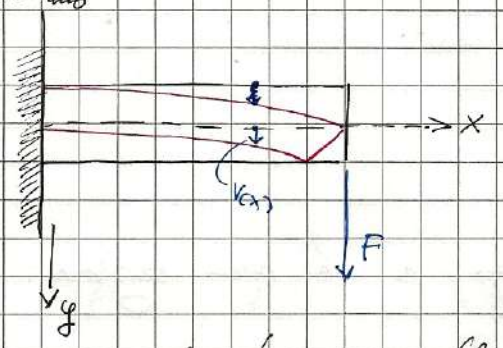
Trascurabile

$$\Delta V = V_{fin} - V_{in} = V_{in}(1 - 2\nu\varepsilon_x + \varepsilon_x - 1)$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_{in}} = \varepsilon_x(1 - 2\nu) > 0 \quad \rightarrow \quad 1 - 2\nu > 0 \quad \rightarrow \quad \nu < 0{,}5$$

Flessione

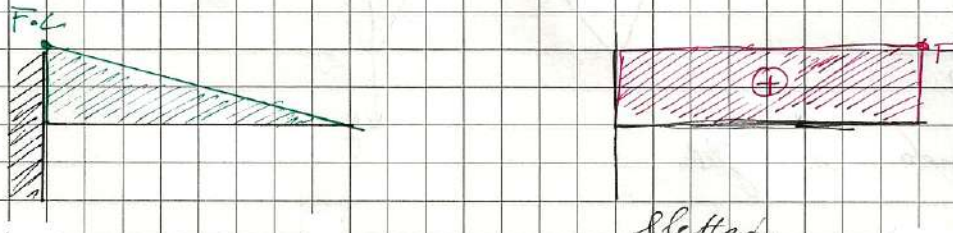
Consideriamo



- Una trave sottoposta ad una azione radiale tenderà a flettere a causa della forza applicata
- esiste quindi un vettore v(x) che descrive per ogni punto della trave lo spostamento verticale subito.

(spostamento dell'asse della trave)

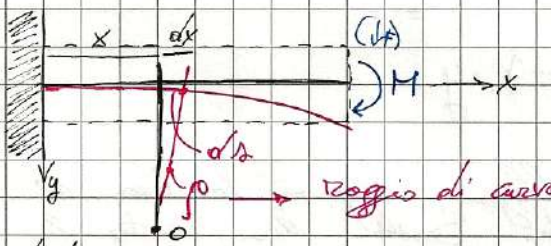
Analizziamo il diagramma del momento flettente



In questo caso, la rigidezza flettente non è costante

Noi interessa studiare situazioni in cui il momento flettente è costante, perché voglio separare gli effetti. Ora voglio studiare solo gli effetti che avrà il momento flettente sulla distribuzione degli sforzi che avrà nel mio componente finito.

Supponiamo il sistema; dove tutte le proprietà sono concentrate nelle linee neutre.



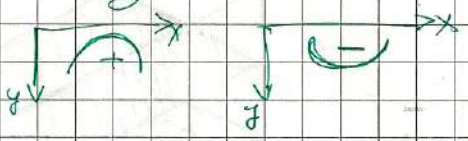
- Nell'ipotesi di piccoli spostamenti possiamo dire che:

$$ds \cong dx$$

Indipendentemente che ci sia un momento flettente costante, il pezzo di trave da è applicabile se ci sono gli sforzi.

Posso scrivere quindi che:

- Convenzioni:



- $\rho \, d\vartheta = ds = dx$

Allora definisco con (Greco) $K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\vartheta}{dx}$

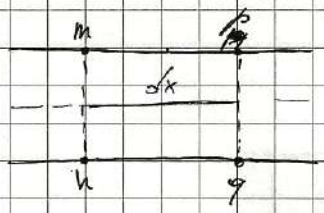
Curvatura

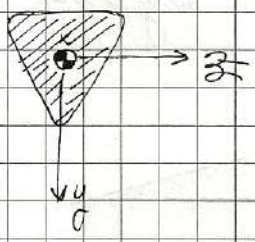
Esempio ①: Studio dell'andamento di una trave soggetta a momento flettente sulle estremità

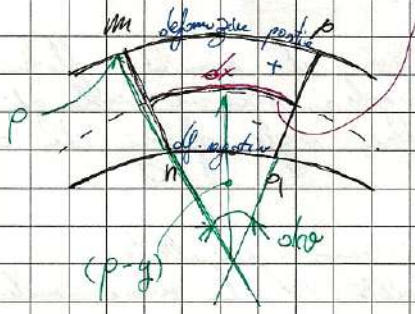
Schematizzata la struttura si presenta così:



Se poi ne consideriamo un pezzo e la sua sezione:







$$L_f = (\rho - y)\,d\theta$$

$$L_i = dx$$

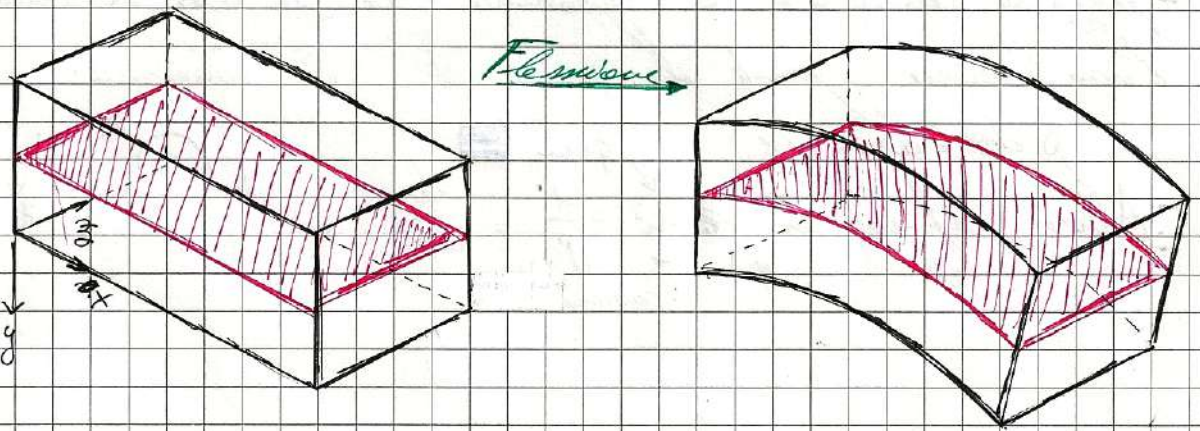
$$\Delta L = L_f - L_i = (\rho - y)\,d\theta - dx = (\rho - y)\,d\theta - \rho\,d\theta$$

$$= -y\,d\theta$$

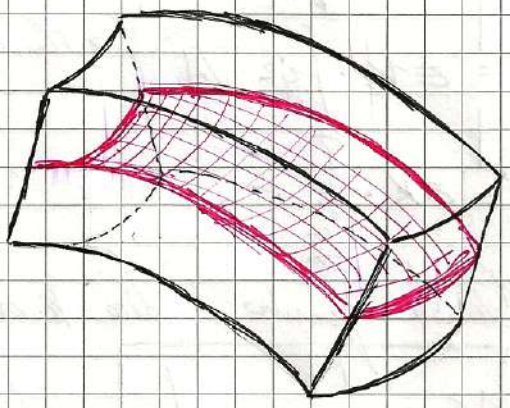
Di conseguenza:

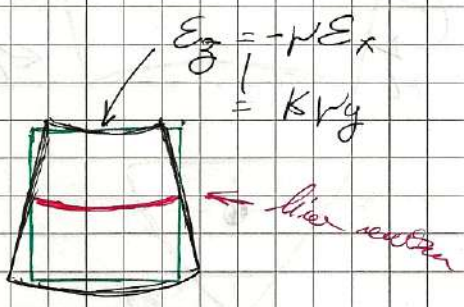
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_i} = -y\,\frac{d\theta}{dx} \longrightarrow \varepsilon_x = -\chi \cdot y$$

Le fibre del materiale si allungano sopra la linea di curvatura e si accorciano al di sotto. Quella linea neutra le fibre non variano la lunghezza.



In realtà anche questa rappresentazione non è esatta, in quanto, per effetto delle deformazioni anche lungo l'asse delle z e delle x:





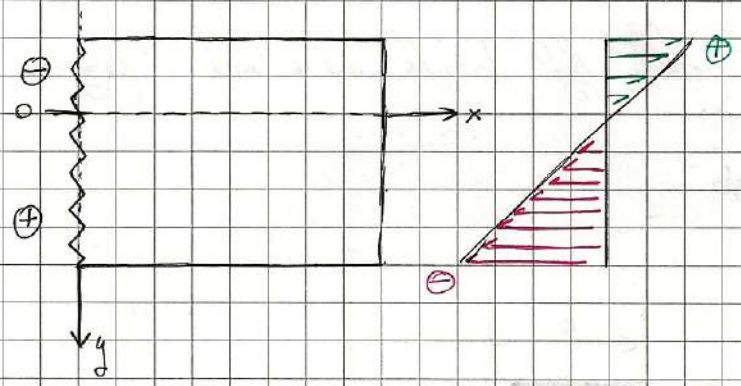
Questa curvatura secondaria prende il nome di:

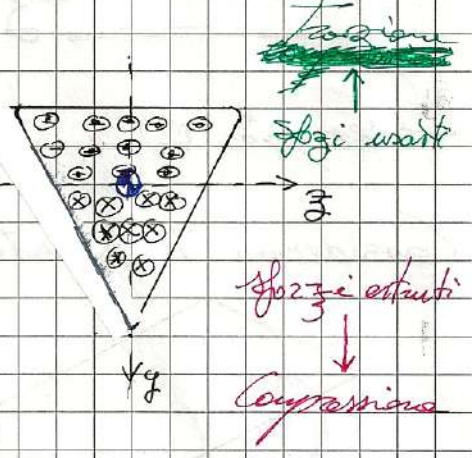
$$K_1 = \nu K \quad \text{e} \quad \frac{1}{\rho_1} = \nu\frac{1}{\rho}.$$

Quindi per un materiale lineare elastico

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = -E K \cdot y$$

Rappresentando graficamente otteniamo:





La risultante delle forze nella superficie della regione sarà l'integrale:

$$\int_A \sigma_x \, dA = \emptyset \Rightarrow \int_A -EKy \, dA = \emptyset$$

$$\Rightarrow \int_A y \, dA = \emptyset$$ ← Questo ci dice che il momento statico $S_x = \emptyset$ quindi l'asse x (quello che separa le forze di trazione e compressione) è baricentrico

Riprendendo la struttura iniziale, calcolo il momento:

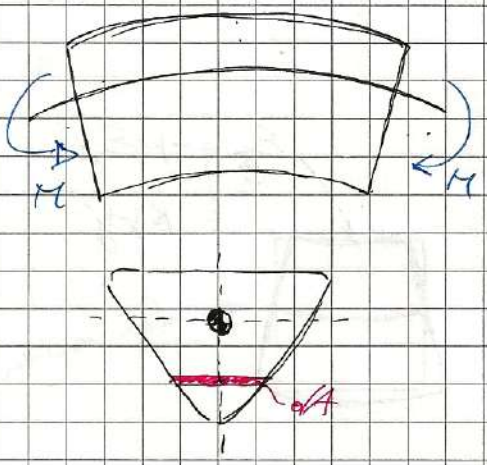
$$M = -\int (\sigma_x \, dA)\, y = +\int_A E K_r \cdot y \cdot y \, dA =$$

$dA \to dF$

$$= E K_r \cdot \int_A y^2 \, dA \quad \to \text{Momento di inerzia } J$$

$$J_z$$

$$M = E K_r \cdot J_z$$



Quindi possiamo dire che

$$K_r = \frac{M}{E \cdot J_z} = \frac{1}{\rho}$$

← Relazione di Eulero-Bernoulli

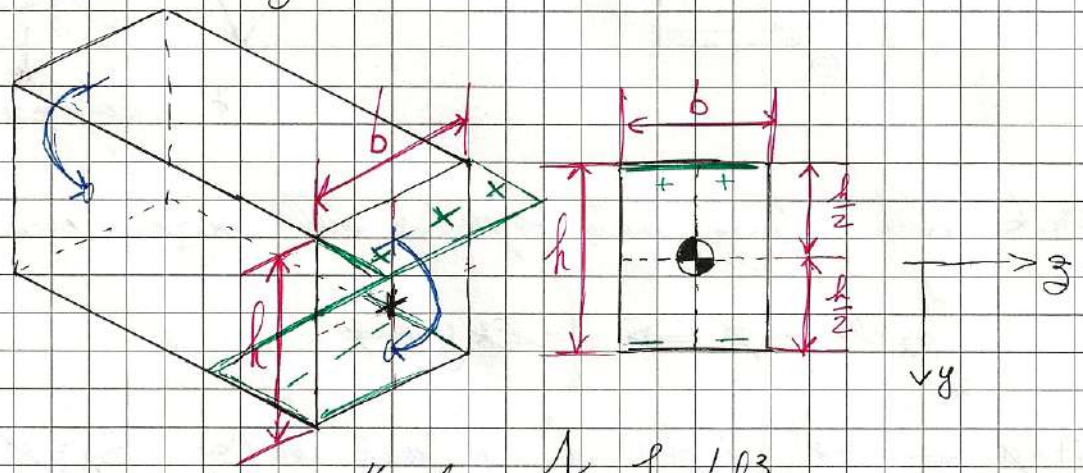
Di conseguenza possiamo dire che:

$$\sigma_x(y) = -\frac{M_F}{J_z} \cdot y$$

← Formula di MARIER

Esempio ②: Applicazione della legge trovata ad un caso di sezione rettangolare.

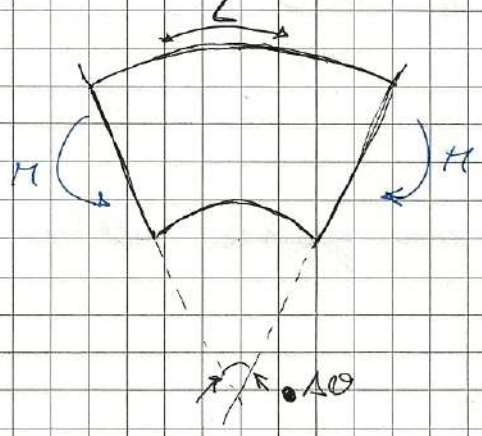
Consideriamo il seguente disegno



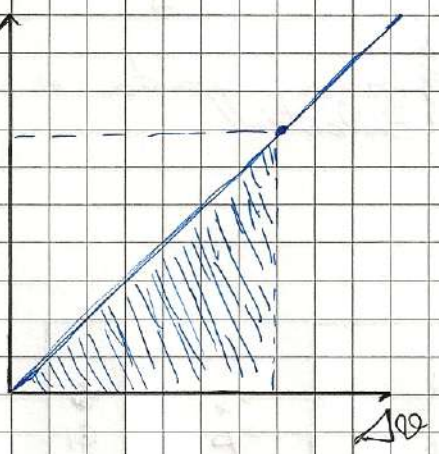
Per una sezione rettangolare: $J_z = \frac{1}{12} b h^3$

$$\to \sigma_{x\,MAX}\Big|_{y=-\frac{h}{2}} = 0 + \frac{M}{\frac{1}{12} b h^3} \cdot \frac{h}{2} = +\frac{6M}{b h^2}$$

Riprendiamo il caso del tratto curvilineo:



Esprimiamo il grafico flettente rispetto alla rotazione dell'angolo ϑ:



Lavoro

$$W = L = \frac{1}{2} M \cdot \Delta\vartheta$$

$$\Delta\vartheta = \int_0^L d\vartheta \qquad \leftarrow d\vartheta = k\,dx$$

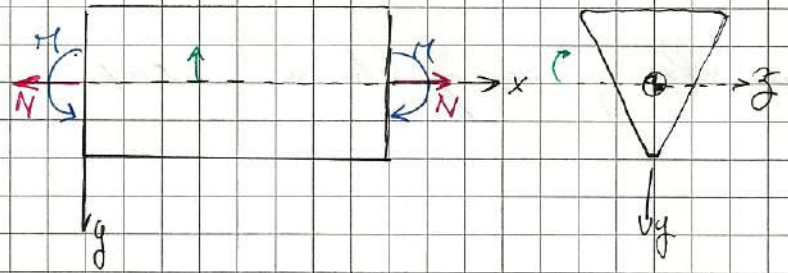
$$= \int_0^L \frac{M}{E J_z}\,dx = \frac{M}{EJ} \cdot L \qquad \leftarrow \text{lunghezza}$$

$$= \frac{M}{E \cdot J_z} \cdot dx$$

$$W = L = \frac{1}{2} \frac{M^2 L}{E J_z}$$

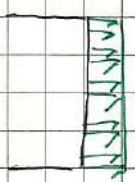
Esempio ③: Sovrapposizione di forze assiali e taglianti

Consideriamo:



y va a proprio comodo a seconda della posizione del triangolo.

- Lo sforzo $\sigma_x^N = \frac{N}{A}$:



- Il momento invece è $\sigma_x^M = -\frac{M}{J_z} \cdot y$

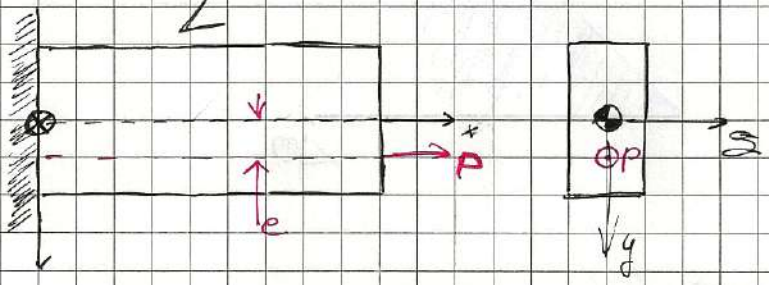


Possiamo quindi ricavare facilmente gli sforzi:

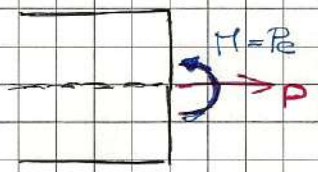
$$\sigma_{x_{TOT}} = \frac{N}{A} + - \frac{M}{J_z} \cdot y$$

Esempio ④: Forza applicata in un punto non appartenente all'asse Baricentrico

Consideriamo:



Dobbiamo riportare la forza nel baricentro. Dovremo aggiungere un momento di trasporto



Ora la risoluzione è analoga a quella dell'esempio ②. (Tenuto conto ovviamente degli effetti)

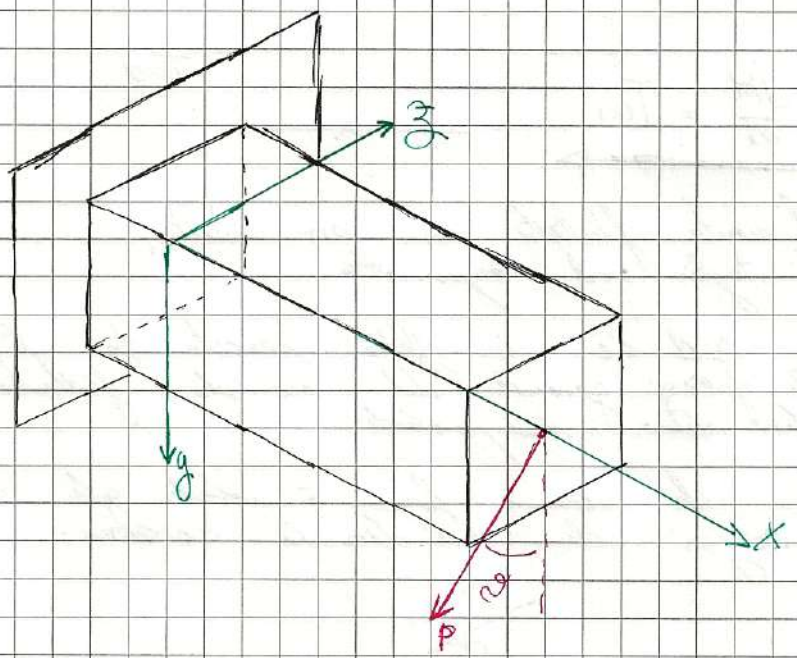
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{J} \cdot y$$

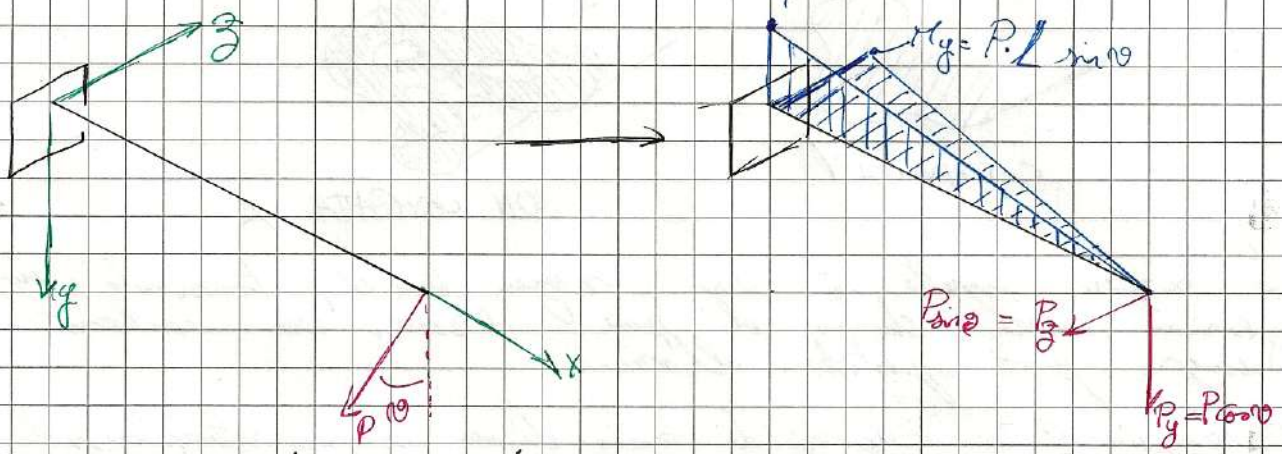
$$= \frac{P}{A} + \frac{Pe}{J} \cdot y$$

L'asse neutro si ottiene dove y corrisponde a $\sigma_x = 0$

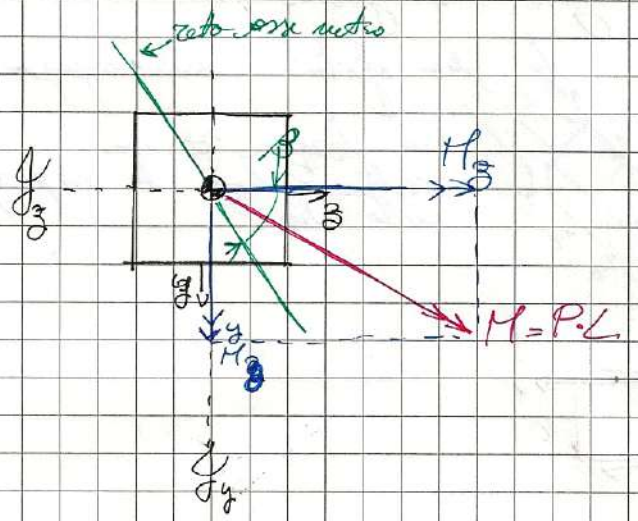
Esempio ⑤: Forza obliqua

Consideriamo:





Problema: obliquità asse neutro



$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} \cdot z - \frac{M_z}{J_z} \cdot y$$

Asse neutro $\rightarrow \sigma_x = 0$

$$y = \frac{J_z}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_z} \cdot z \quad \leftarrow \text{retta dell'asse neutro}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y} = \boxed{\operatorname{tg}\vartheta \cdot \frac{J_z}{J_y}}$$

In questo caso ϑ e β coincidono perché la sezione è quadrata

Sforzi di Taglio

Come visto in precedenza se il momento flettente è costante il taglio in quel tratto è nullo



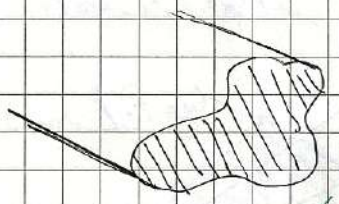
$$\frac{dM}{dx} = T(x)$$

$T = 0$

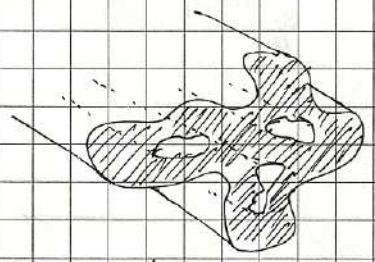
Ho nel caso in cui il momento flettente non sia costante, ovvero degli sforzi di taglio nel conguaglio.

Per questo per cui NON c'è un effetto accoppiato tra gli sforzi di taglio e gli sforzi generati dal momento flettente, quindi le due azioni sono indipendenti.

Una ipotesi semplificativa da cui parte è calcolare gli sforzi di taglio in sezioni che vi dicono COMPATTE:



COMPATTA ✓

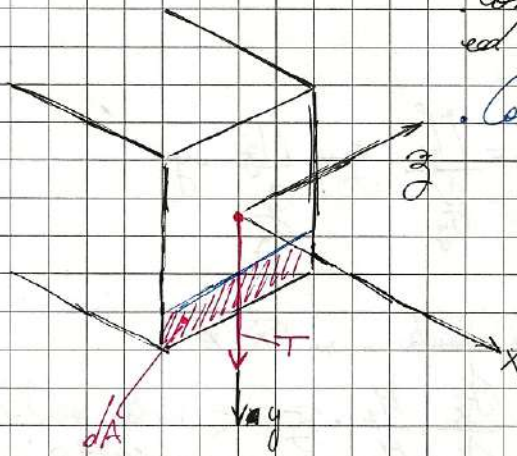


NON COMPATTA ✗

La sezione compatta è una sezione in cui, tracciato un generico cerchio, diamo al suo interno, esso contiene solamente punti appartenenti all'area.

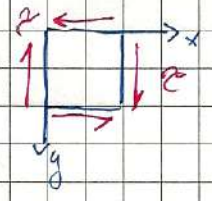
Esempio ①: Sforzi di taglio di una sezione rettangolare

Considero una forza tagliante applicata ad una sezione rettangolare

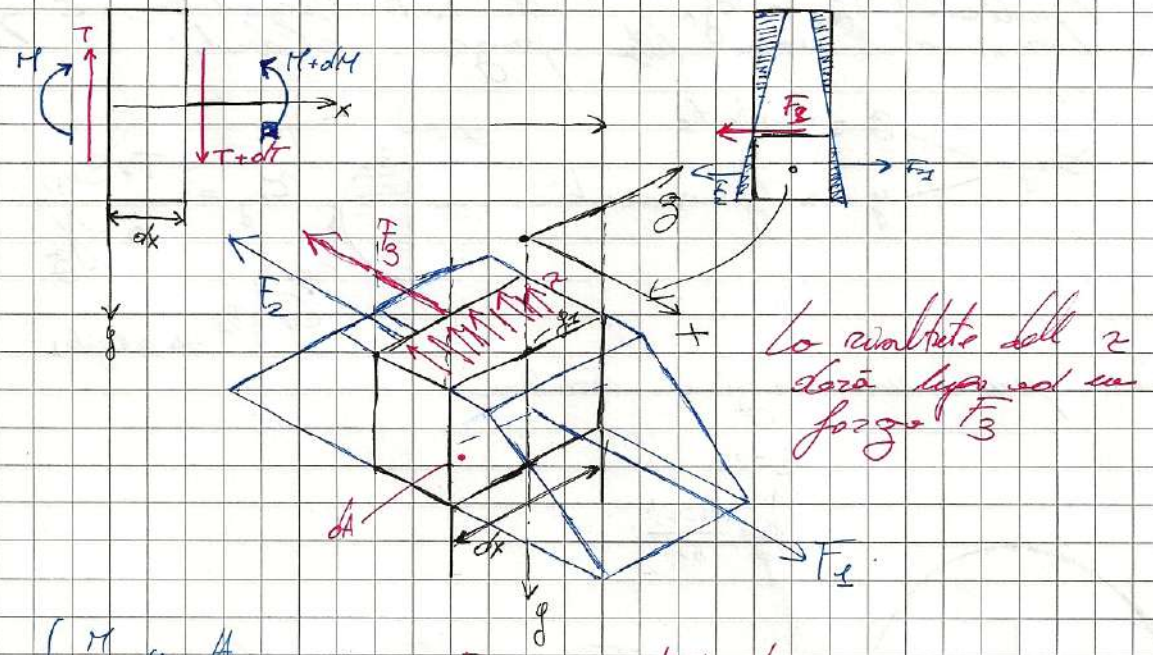


- Considerazioni: una sforzione sulle superfici la forza τ non cambia lungo la larghezza della linea.





Considerando quindi un pezzo di trave infinitesimo di lunghezza dx e vicino le seguenti forze:



La risultante delle τ darà luogo ad una forza F_3

$$F_1 = \int \frac{M}{J_z} \cdot y \cdot dA \qquad F_3 = \tau \cdot b \cdot dx$$

$$F_2 = \int \frac{M+dM}{J_z} \cdot y \, dA$$

Infine deve valere $F_1 - F_2 - F_3 = 0$. Quindi:

$$\int \frac{M}{J_z} y \, dA - \int \frac{M+dM}{J_z} y \, dA - \tau \, dx b = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dM}{J_z} y \, dA = \tau b \, dx \Rightarrow \tau = \frac{1}{J_z b dx} \int_A y \, dA \Longrightarrow$$

$\frac{dM}{dx}$ → Taglio

$$\Rightarrow \boxed{\tau(y_1) = \frac{TS}{b J_z}}$$

S momento statico di A_1 rispetto ad z

Teorema di Jourawski

Taglio in sezione circolare

Abbiamo visto che lo sforzo τ esiste ~~è~~ sul piano zy e sul piano zx. Quindi gli sforzi ~~presenti~~ presenti sono τ_{xy} e τ_{yx}. Il resto segue come nel caso della sezione rettangolare:

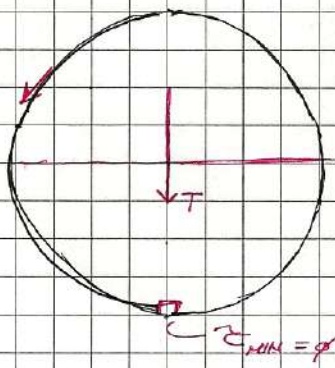
τ_{xy} $\begin{cases} z \to \text{costante} \\ y \to \text{Jourawski} \end{cases} \longrightarrow \tau_{xy} = \dfrac{T \cdot S(y)}{b\, J_z}$

$\tau_{max}\ (y=0) \to \frac{3}{2} T/A$ (per rettangolo)

Verifichiamo per una sezione circolare:

$b = 2r$

$J_z = \dfrac{\pi (2r)^4}{64}$

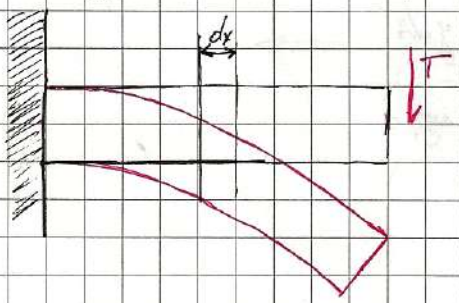


$$\tau_{max} = \frac{T \cdot S(y=0)}{b J_z} = \frac{T}{2r} \cdot \frac{2}{3} r^3 \frac{64}{\pi 16 r^4} = \frac{4}{3} T/A$$

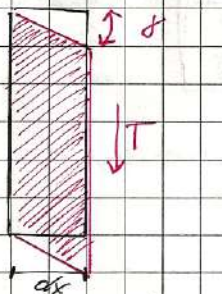
$$S(y=\phi) = A \cdot y_g = \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{r}{\pi} \right) = \frac{2}{3} r^3$$

Deformazione di una trave soggetta a taglio

Prendiamo una trave soggetta a taglio e momento flettente e analizziamo solo gli effetti generati dal momento di taglio:



- Intuitivamente il risultato che esprime la deformazione della trave in proiezione dx in questo modo:

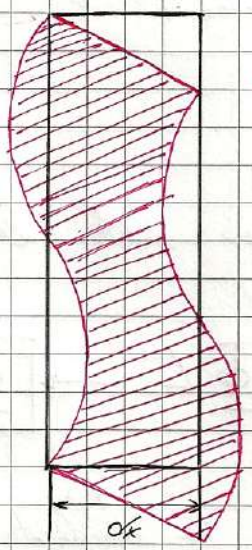


In realtà, per l'ipotesi della formula di Jourawski, la deformazione non può essere rappresentata in questo modo.

Spiegazione:

$\gamma = \dfrac{\tau}{G} \longrightarrow$ Jourawski $\longrightarrow \gamma(y) = \dfrac{1}{G} \cdot \dfrac{T \cdot S(y)}{b\, J_z}$

Integrando la porzione infinitesima di trave ed ottenendo la deformazione, otteniamo una deformazione di questo tipo per una trave soggetta a sola azione di taglio.

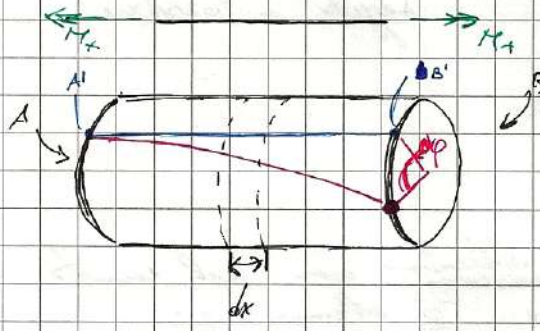


Noi quindi calcoleremo lo spostamento delle travi tozze trascurando la deformazione a taglio, questo perché rimane nell'ipotesi di trave snella.

Deformazione a torsione

Noi ci occuperemo solamente di casi di momento torcente costante

Analizziamo la deformazione di una trave circolare:



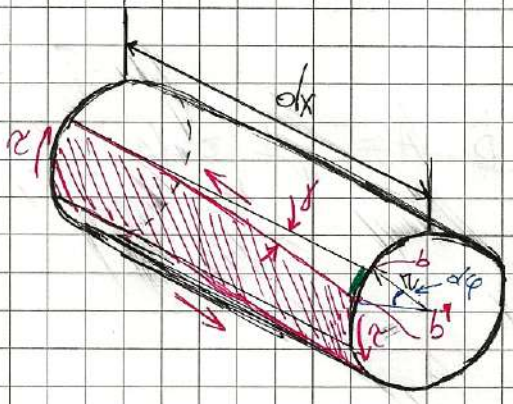
Consideriamo un filo di riferimento γ e contiamo la faccia A fissa rispetto alla faccia B

Il punto B' ruoterà di un angolo φ

Prima quindi ~~generatrice~~ rappresentava la generatrice distorta dell'asta

Osserviamo come cosa avviene in un caso di

Avrò un angolo γ tra la deformata e la generatrice:



Il segmento $\overline{bb'} = \gamma \cdot dx = r \cdot d\varphi$

Quando il momento torcente è costante la seguente derivata è costante

$$\gamma = r \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

La derivata $\frac{d\varphi}{dx}$ viene definita come Φ e si chiama "Angolo unitario di torsione".

Ciò significa che, essendo Φ costante, ogni sezione successiva rispetto alla precedente viene deviata dello stesso angolo Φ. Quindi possiamo scrivere:

$$\gamma = r \cdot \Phi \qquad (I)$$

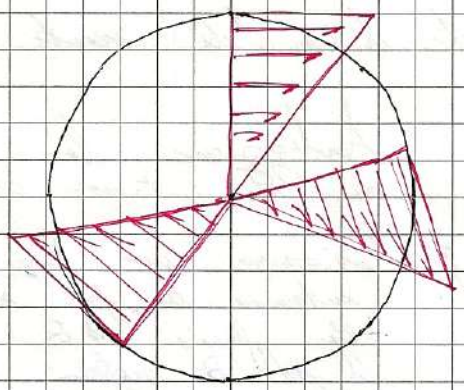
Siccome Φ è costante possiamo dire che:

$$\int_0^\varphi d\varphi = \Phi \int_0^L dx \longrightarrow \varphi = \Phi \cdot L \longrightarrow \boxed{\Phi = \frac{\varphi}{L}} \qquad (II)$$

L'equazione (I) ci dice che la deformazione γ è proporzionale a r e all'angolo Φ.

Per calcolare le τ possiamo sfruttare l'andamento su un grafico:

$$\tau = \gamma \cdot G = r(G \cdot \Phi)$$



Un generico punto della circonferenza esterna dell'albero è il punto di minimo r della trave soggetta a torsione

Per il calcolo della τ massima dobbiamo determinare un link unendo facente riferimento al momento angolare Φ ottenuto φ:

Prendo un'area infinitesima:



$$M_t = \int_A \underbrace{(r\,dA)\,r}_{dM_t} = \int_A r\,G\,\Phi\,dA = G\,\Phi \underbrace{\int_A r^2\,dA}_{J_p}$$

$$M_t = G\,\Phi\,J_p \qquad (III)$$

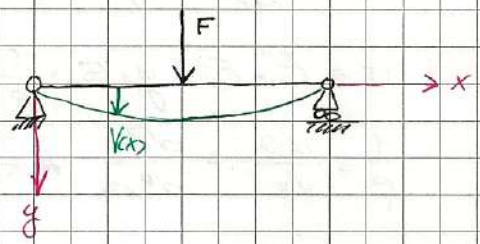
Unendo le equazioni I, II e III:

$$\tau = r \cdot G \frac{M_t}{G \cdot J_p} = \frac{M_t \cdot r}{J_p} \qquad (\tau_{max} \text{ per } r = R)$$

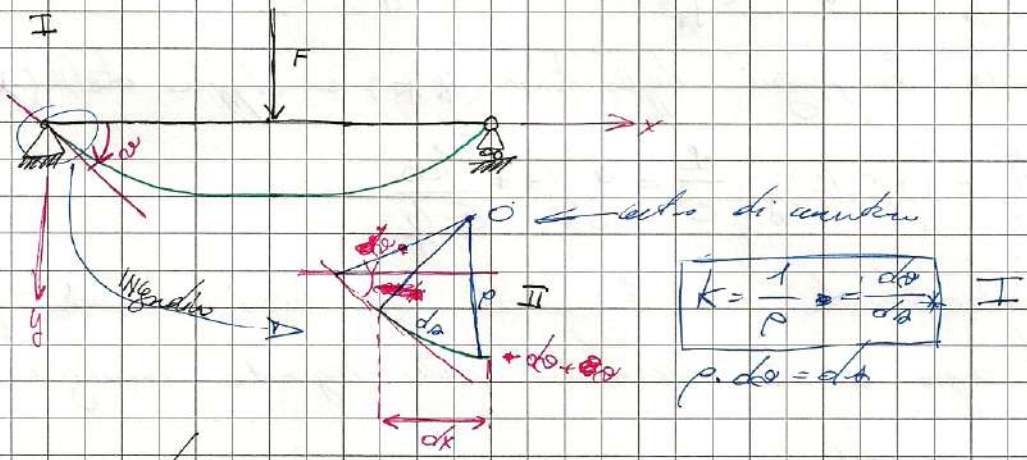
$$K_\tau = \frac{M_t}{\varphi} \leftarrow \text{rigidezza torsionale}$$

Linee elastiche

Non si vuole risolvere il problema dal punto di vista delle reazioni vincolari e delle azioni interne. Dobbiamo capire come è deformata e quanto si deformano i corpi:



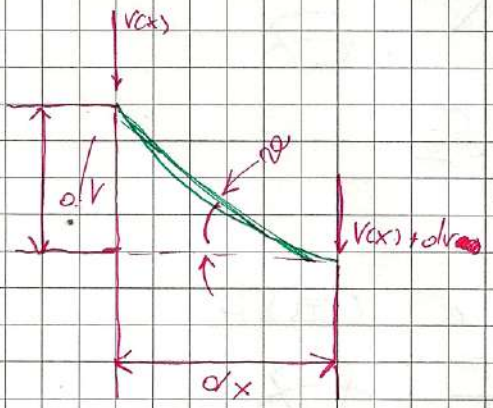
Stiamo solo facendo all'ipotesi di travi snelle, possiamo ignorare gli sforzi di taglio e accettiamo solo se quelli di flessione.
Rispondiamo la deformata spesso:



$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\vartheta}{ds} \quad \text{I}$$

$$\rho \cdot d\vartheta = ds$$

Ingrandiamo ancora di più il pezzo (II)



$$ds \cdot \underbrace{\cos\vartheta}_{1} = dx$$

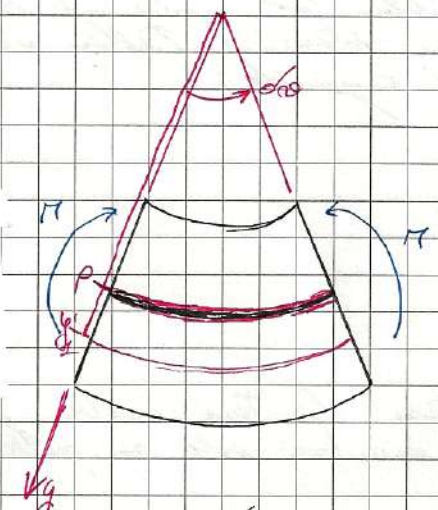
$$\hookrightarrow ds = dx$$

$$\tan\vartheta = \frac{dv}{dx} \quad \text{(II)}$$

Quindi l'equazione (I) diventa $\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{1}{\rho}$ che unita alla (II)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Prendiamo una generica trave soggetta a flessione



$$\varepsilon = \frac{l - dx}{dx} = y \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = y \cdot E \cdot \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 v}{dx^2} \quad **$$

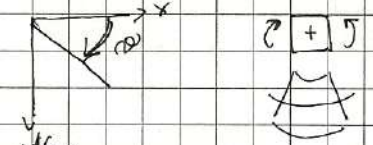
$$M_y = \int_A (\sigma \cdot dA)\, y = E \frac{1}{\rho} \int_A y^2 dA = E \frac{1}{\rho} J_y \quad **$$

Usando la prima doppia ottenuta (**) e doppia stella (**) ottengo:

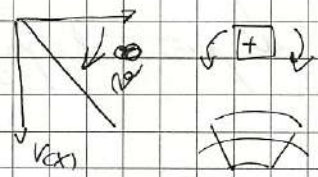
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 v}{dx^2} = \pm \frac{M(x)}{E \cdot J_y}$$

Studiamo l'andamento di una trave nelle Type shit

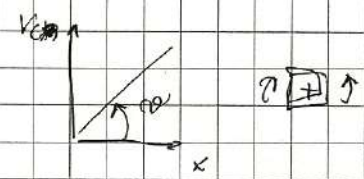
Il segno ± è determinato dalla seguente convenzione



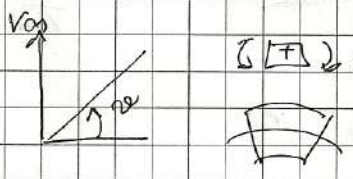
$$v'' = -\frac{M(x)}{E J_y}$$



$$v'' = \frac{M}{E J_y}$$



$$v'' = \frac{M}{E J_y}$$



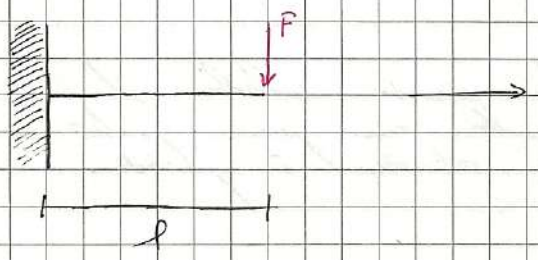
$$v'' = -\frac{M}{E J_y}$$

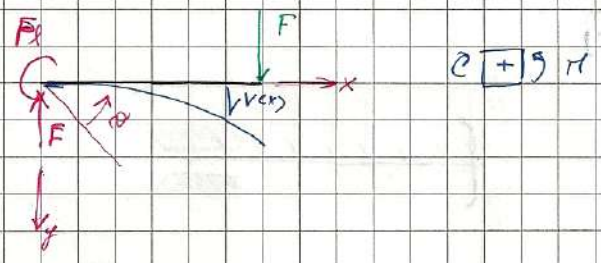
Isostatiche $\begin{cases} M(x) \\ v(x) \end{cases}$

Iperstatiche $\rightarrow v'' = \frac{M}{E J_y}$

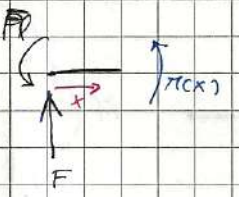
$\begin{cases} v(x),\ v'(x) \\ M(x) \end{cases}$

Esercizio esempio ②: Struttura isostatica





C + S M



$M(x) + Fl - Fx = 0$

$M(x) = Fx - Fl$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EJ}$$

$$\frac{d^2 v(x)}{dx} = -\frac{1}{EJ}(Fx - Fl)$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{F}{2}x^2 - Fl \cdot x + C_1\right)$$

$$v(x) = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{F}{6}x^3 - \frac{Fl}{2}x^2 + C_1 \cdot x + C_2\right)$$

Condizioni di contorno

- $v(x=0) = 0$
- $v'(x=0) = 0$

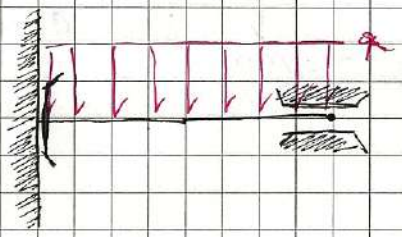
Per le condizioni di contorno $C_1 = 0$, $C_2 = 0$

$$v(x) = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{F}{6}x^3 - \frac{Fl}{2}x^2\right)$$

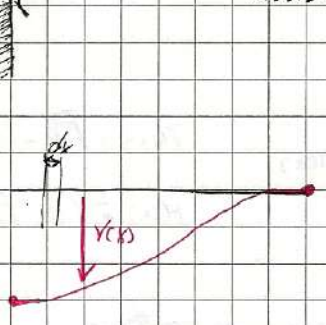
$$K = \frac{F}{v_{max}} \qquad v_{max} = v(x=l) = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{F}{6}x^3 - \frac{Fl}{2}x^2\right) = -\frac{l}{EJ}\left(\frac{Fl^3}{6} - \frac{Fl^3}{2}\right) = \frac{Fl^3}{3EJ}$$

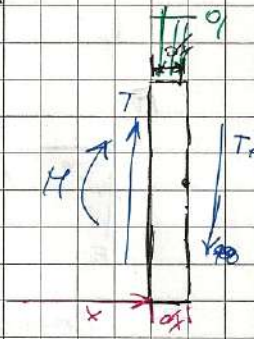
$$= \frac{F}{Fl^3}\,3EJ = \frac{3EJ}{l^3}$$

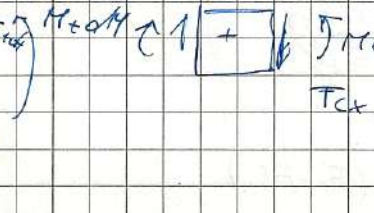
Esempio esame ②: Statica grafica



Non possiamo calcolare il momento in quanto la struttura è iperstatica







$$M + dM - M - T\,dx + q\,dx\,\frac{dx}{2} = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = T$$

$$T - T - dT - q\,dx = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = -q$$



$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2v}{dx^2} &= -\frac{M(x)}{EJ} \\ \frac{d^3v}{dx^2} &= -\frac{dM}{dx}\frac{1}{EJ} = -T(x)\frac{1}{EJ} \\ \frac{d^4v}{dx^4} &= -\frac{dT}{dx}\frac{1}{EJ} = \frac{q}{EJ} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$V^{IV} = \frac{q}{EJ}$$

$$V''' = \frac{1}{EJ}(qx + A)$$

$$V'' = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{2}x^2 + Ax + B\right)$$

$$V' = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{6}x^3 + \frac{A}{2}x^2 + Bx + C\right)$$

$$V = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{24}x^4 + \frac{A}{6}x^3 + \frac{B}{2}x^2 + Cx + D\right)$$

Condizioni al contorno:

$x = 0$:

$\hookrightarrow V'(x=0) = 0 \quad C = 0$

$\hookrightarrow T(x=0) = 0$

$T = -EJ\,V''' = -EJ\frac{1}{EJ}(qx + A) \quad A = 0$

$x = l$

$\hookrightarrow V'(x=l) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{6}x^3 + Bx\right) = 0$

$\hookrightarrow B = \frac{ql^2}{6}$

$V(x=l) = 0$

$\hookrightarrow \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{24}x^4 - \frac{ql^2}{12}x^2 + D\right) = 0 \rightarrow D = \frac{ql^4}{24}$

$$V(x) = \frac{1}{EJ}\left(\frac{q}{24}x^4 - \frac{ql^2}{12}x^2 + \frac{ql^4}{24}\right)$$

$$T = -V'''EJ = -qx$$

$$M = -\frac{q}{2}x^2 - \frac{ql^2}{6}$$

Prove meccaniche

Ora che sia in grado di realizzare lo stato di sforzo e una sezione di materiale, dobbiamo analizzare come esso si rapporta con la resistenza del materiale

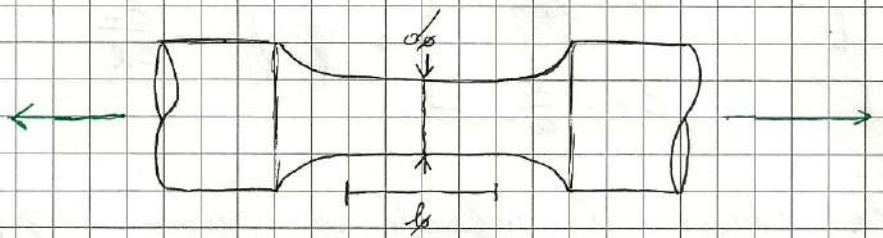
Il generico stato di sforzo ha 9 componenti. Alla luce di uno stesso di rapporti queste componenti vanno in un valore di resistenza. Questo stato è l'inizio del Pericolo

Prove di Trazione

Ci sono due normative per queste due prove:

- BS EN ISO 6892-1:2016
- E8/E8M-16a (ASTM)

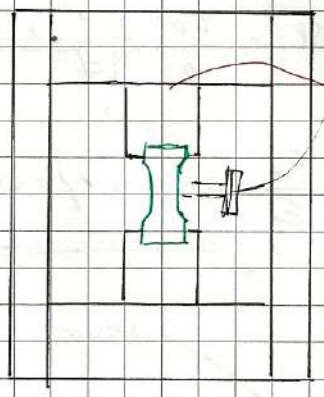
La geometria classica del provino per la prova di trazione è la quella a destra:



$d_0 = 2,5 - 6,25 - 12,5$ mm

$l_0 = 10 - 25 - 50$ mm

- La prova viene effettuata con una macchina servo - idraulica:

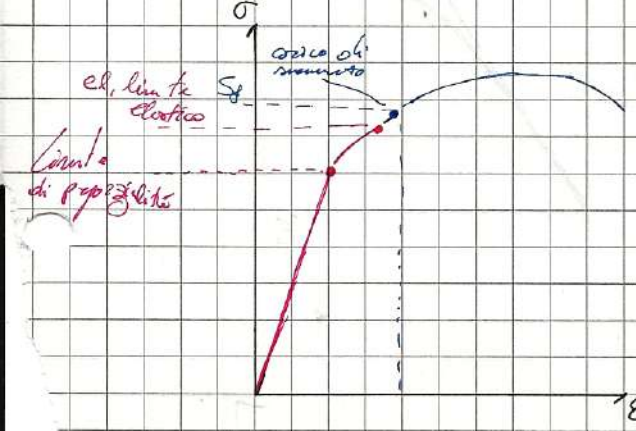


Estensometro che misura il Δl

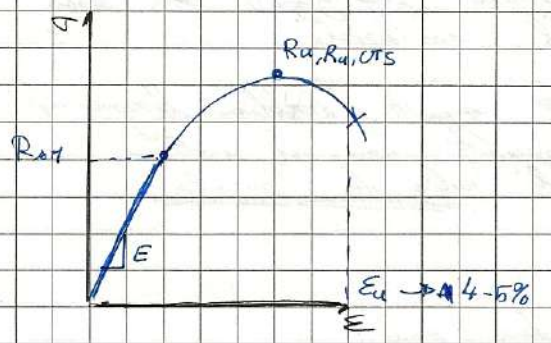
Forza in tempo reale F

$F, \Delta l \rightarrow \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$, $\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi d_0^2 / 4}$ → sforzi e deformazioni ingegneristici

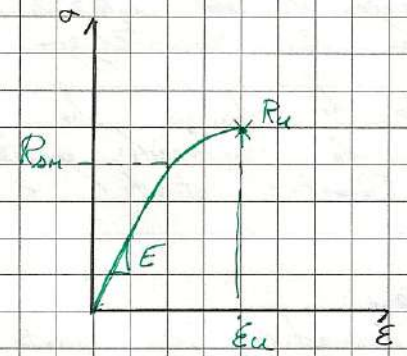
Ciò ci permette di realizzare un diagramma:



I materiali si possono dividere in

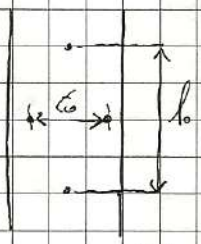


DUTTILE



FRAGILE

Per primo il coefficiente di Poisson del materiale, è necessario un secondo esperimento



$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta t}{t_0}$$

$$\Big] \rightarrow \nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l}$$

In corpo duttile solitamente il coefficiente di Poisson è $\nu \simeq 0,3$

Sperimentalmente però, se si osserva che in corpo plastico i materiali metallici si deformano a volume costante:

$$V = A \cdot l = \frac{\pi d^2}{4} l \quad , \Delta V = 0$$

$$\rightarrow \Delta V = \Delta A\, l + A\, \Delta l = \frac{\pi d}{2} \Delta d\, l + \frac{\pi d^2}{4} \Delta l = \frac{\pi d l^2}{2} \Delta d\, l + \frac{\pi d^2}{4} \Delta l = \frac{\pi d l^2}{4} l \left(\frac{1}{d} 2 \Delta d + \frac{\Delta l}{l} \right)$$

$$\rightarrow V = \left(2 \cdot \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l} \right) = V(2\varepsilon_t + \varepsilon_l) = 0$$

$$\rightarrow 2\varepsilon_t + \varepsilon_l = 0 \rightarrow \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l} = -0,5 \rightarrow \nu = 0,5$$

Si determina sempre le grandezze reali:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{A}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \sum_i \frac{\Delta l_i}{l} = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \ln l - \ln l_0 = \ln \frac{l}{l_0}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \ln \frac{l}{l_0} \rightarrow \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1$$

$$\varepsilon + 1 = \frac{l}{l_0} \rightarrow \ln(\varepsilon + 1) = \ln \frac{l}{l_0} = \tilde{\varepsilon}$$

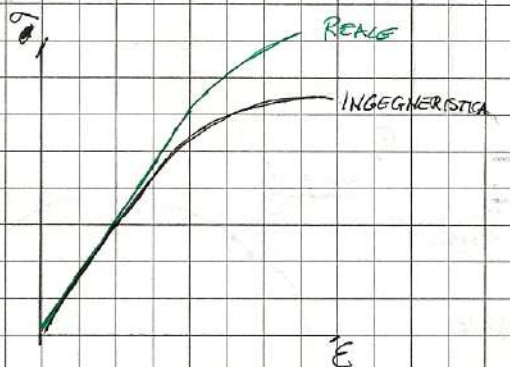


grafico delle ingegneristiche e reali

$\sigma = \frac{F}{A}$ → ricavo Volume è costante il → $A \cdot l = A_\phi l_\phi$

$\frac{l}{l_\phi} = \frac{A_\phi}{A} = \varepsilon + 1$

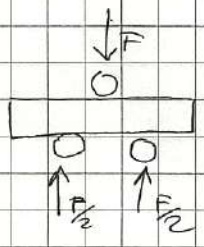
$A = \frac{A_\phi}{\varepsilon + 1}$ → $\tilde{\sigma} = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_\phi}(\varepsilon + 1) = {}^{\phi}\sigma\,(\varepsilon + 1)$

Abbiamo perde differenza fra il reale e la ipotesi:

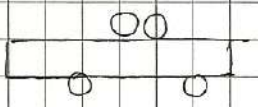
ε	0,1%	2%	10%
$\tilde{\varepsilon}$	0,999500	0,995 %	9,53 %

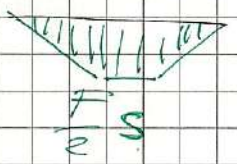
Flessione

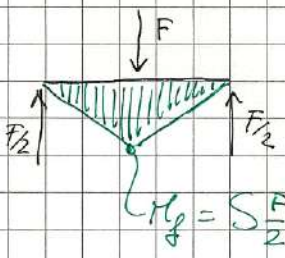
↳ 3PB

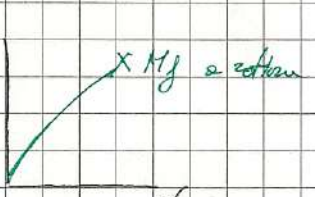


↳ 4PB





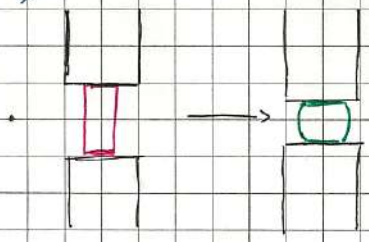




$\sigma_{max} = \frac{M_{f\,sezione} \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b h^3}{12}}$

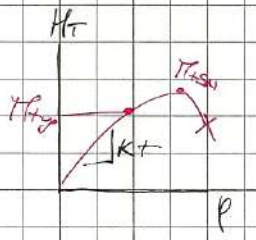
Sezione rettangolare

Compressione



Torsione





$\tau_y = \frac{M_{T_y} \cdot \frac{d}{2}}{\frac{\pi}{32} d^4} = \frac{16\, M_{T_y}}{\pi d^3}$

$\tau_w = \frac{16 \cdot M_{T_y}}{\pi d^3}$

$\left(\frac{M_t}{\varphi}\right)_d = K_T = \frac{G \cdot J_p}{L} = \left(\frac{M_t}{\varphi}\right) \Rightarrow G$

Effetti d'intaglio

Quando abbiamo studiato il corpo di prova per una sezione interna assiale, abbiamo detto che valgono le seguenti ipotesi:

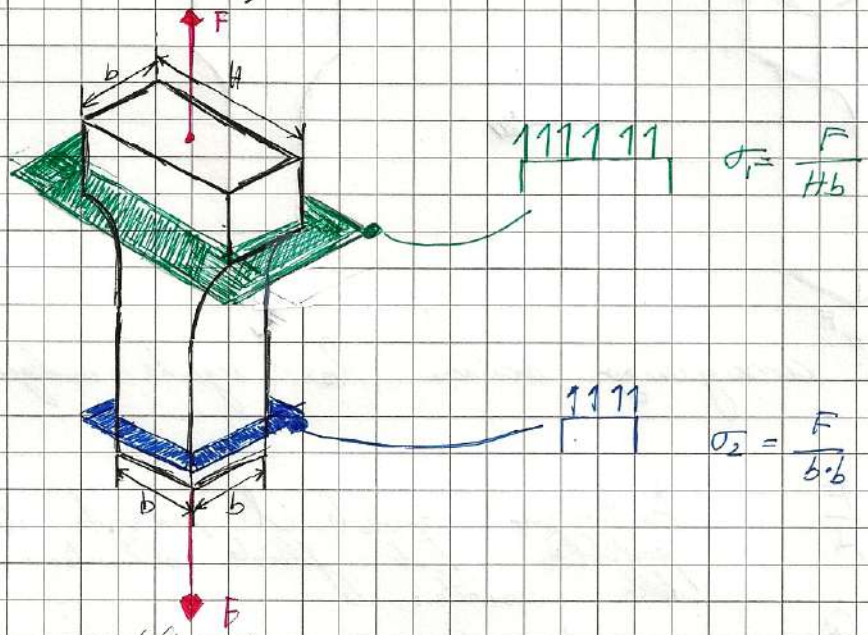
↳ Il materiale si comporta in maniera lineare-elastica

↳ Asse rettilineo

↳ Costante o variabile con continuità

↳ Sufficientemente lontano da vincoli e forze

Nella realtà però le travi non seguono sempre queste ipotesi. Per esempio:



Siamo dove la zona dello sforzo σ_2 è più piccola, segue che $\sigma_2 > \sigma_1$. Non è strano che anche le deformazioni cambiano:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \qquad \varepsilon_{t_1} = \nu \frac{\sigma_1}{E}$$

e

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} \qquad \varepsilon_{t_2} = \nu \frac{\sigma_2}{E}$$

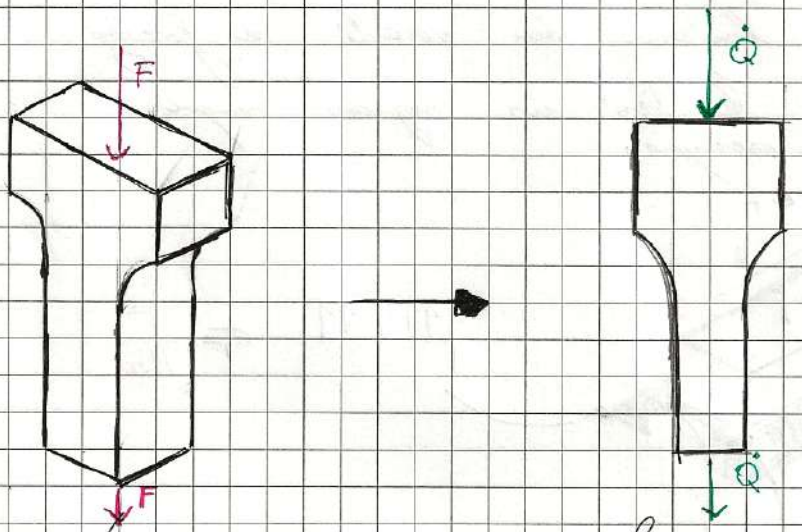
Queste deformazioni trasversali ε_{t_1} e ε_{t_2} devono essere contenute, perché si deve essere compatibili e non si può avere lacerazione del materiale. Essendo $\varepsilon_{t_1} < \varepsilon_{t_2}$ e $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ i volumi si deformano diversamente.

Nella zona di geometria variata si sviluppano degli effetti d'intaglio.

Per comprendere intuitivamente come si comporta il materiale nelle vicinanze di geometrie particolari conviene fare un'analogia idraulica. Ci aspettiamo di capire come l'intaglio influenza la distribuzione degli sforzi.

Analogia Idraulica:

Supponiamo che la barretta possa in realtà essere vista come un condotto che ha al suo interno un fluido con una certa portata.



Possiamo di conseguenza vedere la seguente analogia di formule:

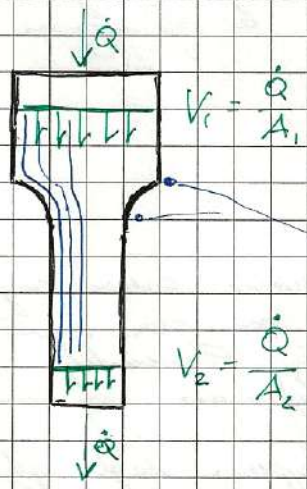
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

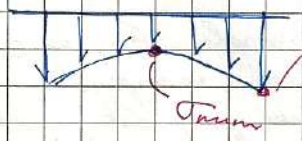
$$\updownarrow$$

$$v = \frac{\dot{Q}}{A}$$

- Analizziamo quindi il comportamento di una particella di fluido all'interno della condotta:

- La componente della velocità varia a seconda della direzione in cui fluisce, quindi lungo la portata è diversa e la velocità della particella nei lembi è più alta di quella al centro:



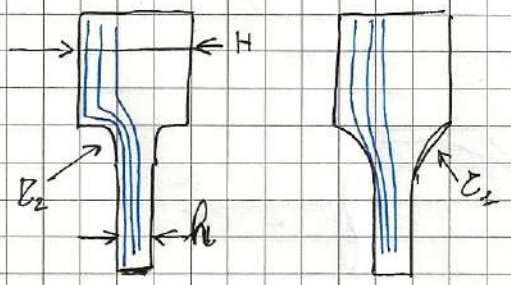


- Così come $J \rightarrow v$ allo stesso modo la zona di variazione della sezione dello sforzo nel grafico è simile.

- Quindi l'intaglio nella discontinuità geometrica viene "percepito" la soluzione di De Saint Venant.

- Dato che creo una sovrasollecitazione, l'effetto di intaglio è un effetto negativo.

Vediamo come calcolare lo sforzo al cambiare del raggio di raccordo:



$r_2 \ll r_1$

- Una sezione particolare applica un maggiore sforzo nel filetto. Di conseguenza:

$r_2 \Rightarrow \sigma_2$

- L'intaglio r_2 è più grave rispetto all'intaglio r_1

Lo sforzo subito dal componente sarà ~~grande~~ influenzato da

- r/H
- h/H
- Tipologia di carico (F, M_f)

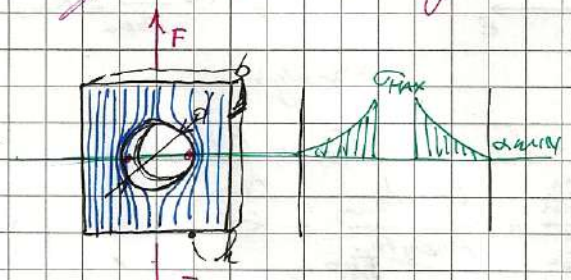
Queste variabili vengono condensate nel "Coefficiente di intaglio teorico"

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$

σ_{max}: sforzo locale nel punto più sollecitato

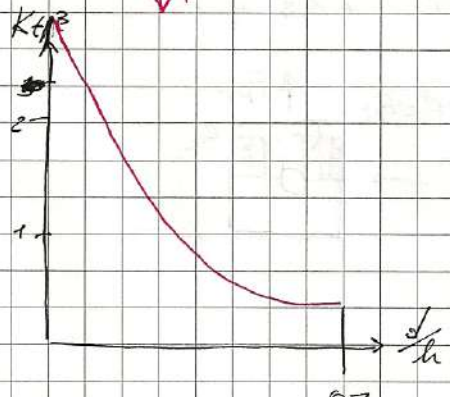
σ_{nom}: sforzo di riferimento. In questo caso lo sforzo nominale è $\sigma_{nom} = \frac{F}{h \cdot b}$

Esempio ①: Lastra forata soggetta a trazione



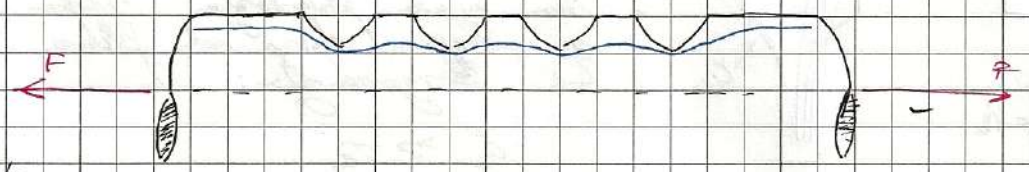
$$K_T = \frac{\sigma_{MAX}}{\sigma_{NOM}}$$

$$\sigma_{NOM} = \frac{F}{A_{NOM}} = \frac{F}{b \cdot (h-d)}$$



Effetto cuneo

È un effetto che si crea quando sforzo più di un foglio in sequenza



Il primo intaglio "schiva" gli intagli successivi.

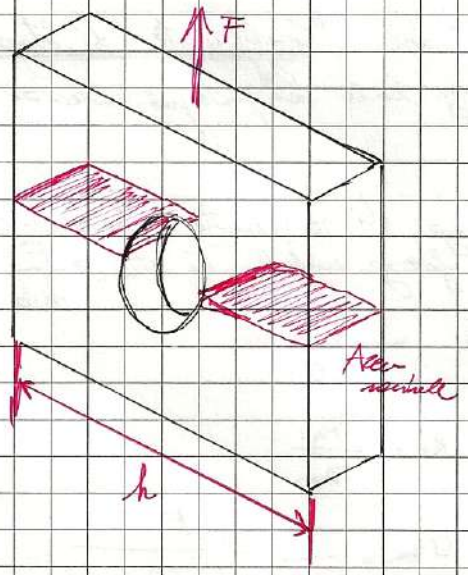
Coefficiente di intaglio sperimentale

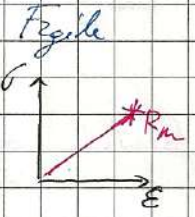
Il K_t non dipende dal materiale. Il K_s contiene al suo interno anche gli effetti del materiale. Precisi in caso delle lastre forate.

$$K_s = \frac{F_{lim}}{F'_{lim}} \geq 1$$

F_{lim} ← forza che porta a rottura senza intaglio

F'_{lim} ← forza che porta a rottura la sezione con l'intaglio





con intaglio:

$$\sigma_{max} = K_t \sigma_{nom} = K_t \cdot \frac{F'_{lim}}{A_{nom}} = R_m$$

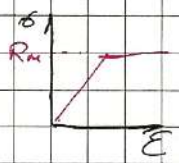
senza intaglio:

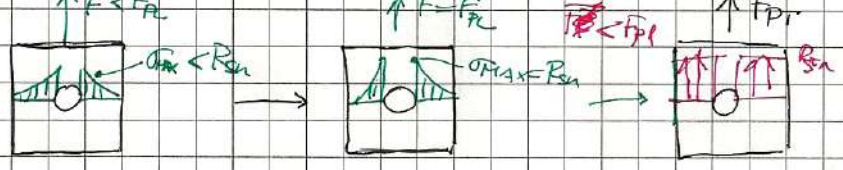
$$\sigma_{nom} = \frac{F'_{lim}}{A_{nom}} = R_m$$

$$K_S = \frac{F_{lim}}{F'_{lim}} = \frac{R_m \cdot A_{nom}}{A_{nom} R_m / K_t} = K_t$$

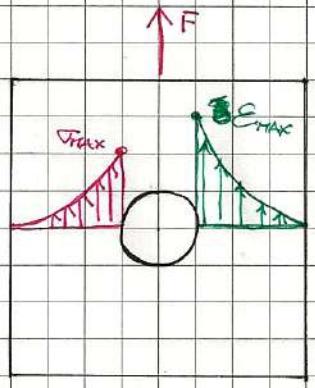
Se non avviene ciò in caso elastico il $K_S = K_T$

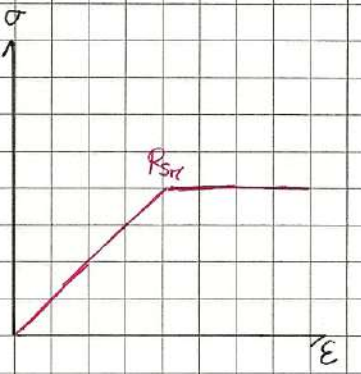
Duttile





Analizziamo più nel dettaglio il caso di materiale duttile:





$$K_d = \frac{F_{lim}}{F_{lin}} \geq 1$$

- Il comportamento del materiale è uguale a quello fragile fino al punto di snervamento. Il carico che porta il materiale a snervamento è il carico di prima plastificazione (F_{PL})
- Oltre il carico di prima plastificazione ci sono le deformazioni continue anche se il carico non cresce, come mostrato nel grafico.

Progettazione in campo monoassiale

↳ Fragile → $\sigma_{MAX} = K_t \sigma_{nom} \leq \frac{R_m}{\gamma}$ ← coefficiente di sicurezza (3 circa)

↳ Duttile → Prima plastificazione

↳ $\sigma_{MAX} = K_t \cdot \sigma_{nom} \leq \frac{R_m}{\gamma}$ ← più essere più basso (1.5)

→ Plasticizzazione totale

↳ $\sigma_{MAX} = K_d \cdot \sigma_{nom} = \sigma_{nom} \leq \frac{R_{sn}}{\gamma}$

Criteri di resistenza statica

Per poter progettare tenendo il valore Rm diviso un coefficiente di sicurezza, ovvero confrontare un vettore degli sforzi ridotti con un valore per ottenere il coefficiente di sicurezza

→ Partiamo con delle definizioni:

Carico Statico: insieme di forze e momenti applicati ad un componente in maniera costante nel tempo.

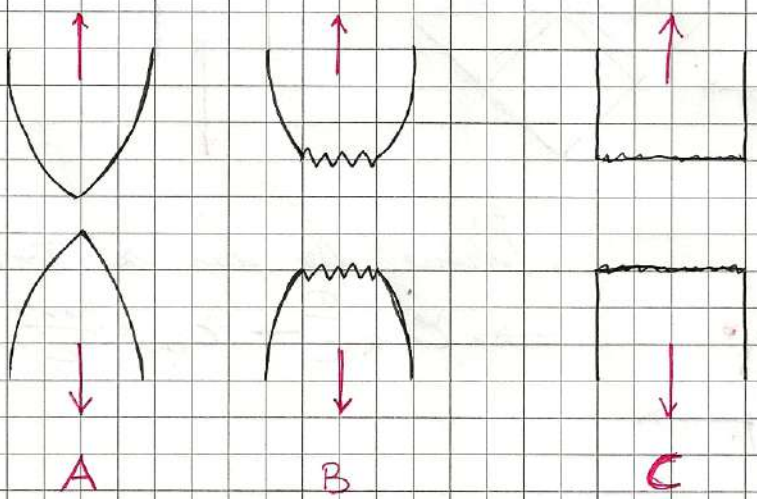
- Essendo grandezze vettoriali, forze e momenti statici devono mantenere costanti l'intensità, il punto di applicazione e la direzione.
- Un carico statico può produrre stati tensionali di trazione o compressione assiali, di taglio, di flessione, di torsione, oppure una qualsiasi combinazione di questi

Guasto: rottura totale di un componente in più pezzi, oppure la deformazione permanente e/o la compromissione della sua geometria, oppure il degrado dell'affidabilità della struttura/componente/meccanismo.

→ Per evitare cedimenti occorre progettare in maniera tale da avere un certo margine di sicurezza rispetto alle condizioni limite (Rsn, Rtn)

→ La prova di trazione è la prova utilizzata per ottenere i dati sperimentali da poi utilizzare in fase di progettazione è una prova che avviene in condizioni quasi-statiche (if you know what I mean)

→ In base a come il materiale si rompe in prova di trazione possiamo dividerli in materiali molto duttili (A), materiali moderatamente duttili (B) e materiali fragili (C)



- Noi lavoreremo principalmente nella categoria dei materiali moderatamente duttili

Il processo che porta a rottura statica di un materiale duttile è caratterizzato da:

1) Strizione di una parte del materiale
2) Nucleazione di vuoti locali
3) Crescita dei vuoti e coalescenza
4) Deformazione plastica per incrudimento in prossimità della superficie libera
5) Rottura

Criteri per materiali duttili:

- Guest - Tresca
- Von - Mises
- Rosa - Eichinger

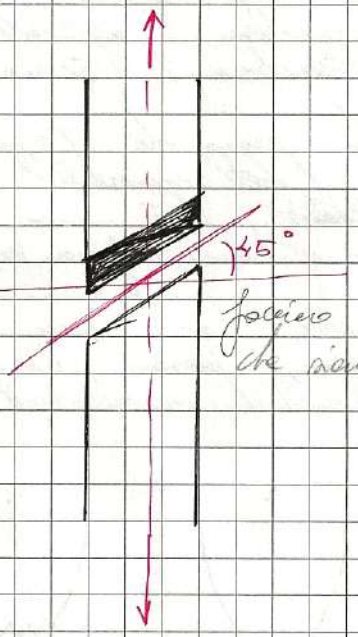
Criteri per materiali fragili:

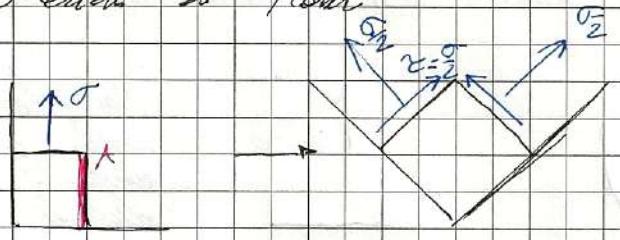
- Massima sollecitazione normale (Galileo, Rankine, Navier)

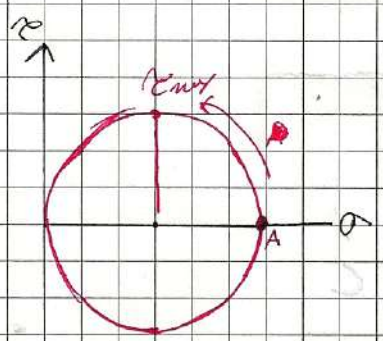
- Criterio di Guest - Tresca

- Durante le prove di trazione si è notato che le dislocazioni si muovono più facilmente su piani inclinati di 45° rispetto all'asse di applicazione delle forze

- Analizzando un elemento infinitesimo soggetto alla trazione con l'applicazione dei cerchi di Mohr







- Possiamo dire che se $\sigma = R_{sn} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tau_{max} \frac{\sigma}{2} \rightarrow \tau_{sn} = \frac{R_{sn}}{2}$$

Generalizzando per uno stato di sforzo multiassiale, utilizzando il metodo dei cerchi di Mohr:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}$$

Il nostro componente andrà sicuramente in campo plastico grande:

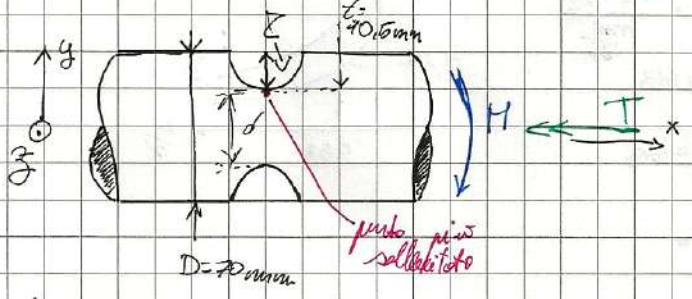
$$\underbrace{\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}}_{\text{Multiassialità}} = \underbrace{\tau_{sn} = \frac{R_{sn}}{2}}_{\text{prova di trazione}}$$

Il criterio di Guest-Tresca si ottiene quindi sfruttando:

$$\sigma_{GT}^{**} = \sigma_I - \sigma_{III} \leq \frac{R_{sn}}{\underbrace{2}_{\tau_{AMM}}} \leftarrow \text{coefficiente di sicurezza per i duttili è } 1.5$$

τ_{AMM} sforzo ammissibile

Esercizio esempio ①: Albero soggetto a torsione e flessione ed gode di simmetria

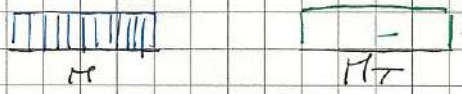


$t = 10.5\ mm$
$D = 70\ mm$
$r = 7\ mm$
$\phi = 49\ mm$

$E = 200.000\ MPa$
$\nu = 0.3$

$M = 1\ kN_m = 10^6\ N_{mm}$
$T = 2,5\ kN_m = 2,5 \cdot 10^6\ N_{mm}$

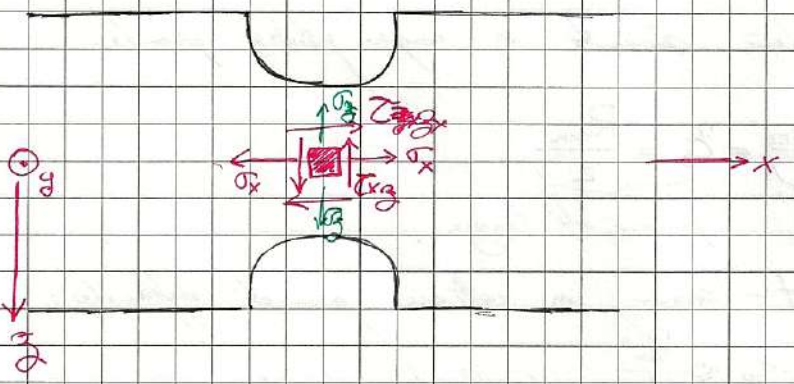
Le azioni interne sono costanti:



Partiamo con l'analizzare la distribuzione degli sforzi

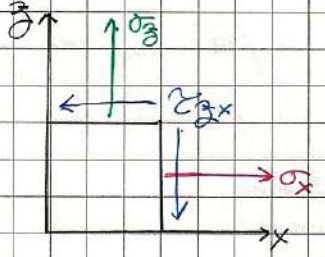


Giriamo il sistema di riferimento:



- Il σ_z esiste per l'impedimento alla contrazione dei nuclei dovuta alla deformazione di quelle poste in basso. Allora:
$\sigma_z \cong \nu \cdot \sigma_x$

Rappresentiamo il nostro stato di sforzo:

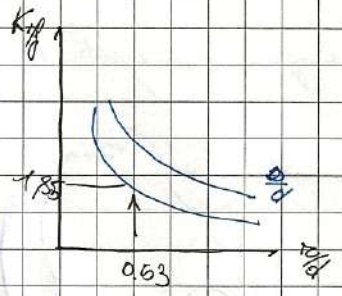


- $\sigma_{max} = K_T \cdot \sigma_{nom}$

$\sigma_{x_{nom}} = \frac{M_f \cdot d/2}{\pi \frac{d^4}{64}}$

$\frac{D}{d} = \frac{70}{49} = 1.43$

$\frac{r}{d} = \frac{7}{49} = 0.18$



$\sigma_{nom_x} = 86.6\ MPa$

$\sigma_{max,x} = \sigma_{x_{nom}} \cdot K_{tf} = 160\ MPa$

$\sigma_z = \nu \cdot \sigma_{x_{max}} = 48\ MPa$

Analogamente per la torsione:

$\tau_{xz_{nom}} = \frac{M_T \cdot d/2}{\pi \frac{d^4}{64}} = \frac{16\,M_t}{\pi d^3} = 108\ MPa$

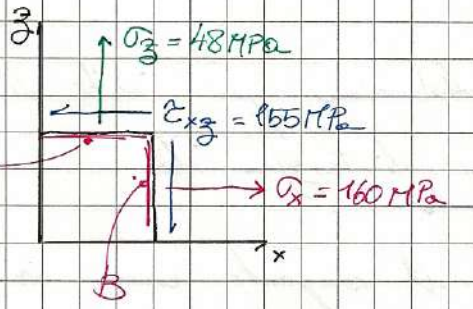
- $K_{T_t} = 1.43$

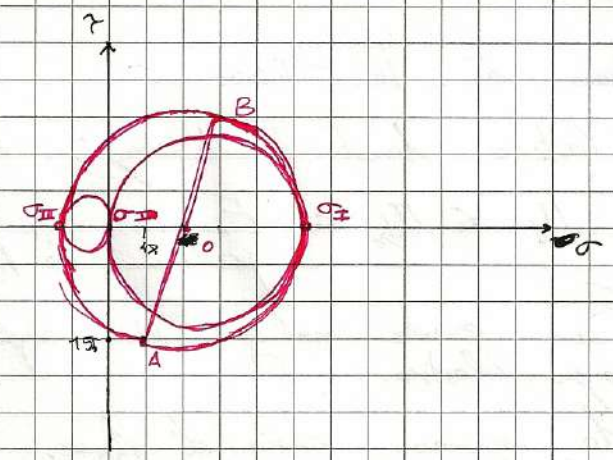
$\tau_{xz_{max}} = K_t \cdot \tau_{xz_{nom}} = 155\ MPa$

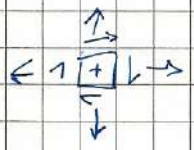
Ora dobbiamo infine il criterio di Guest-Tresca:

$\sigma_{GT}^* = \sigma_I - \sigma_{III}$

Dobbiamo quindi utilizzare i pesi di Rabe per calcolare gli sforzi principali.







$$\sigma_0 = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} = 104\,MPa$$

$$\overline{OB} = \sqrt{\tau_B^2 + (\sigma_x - \sigma_0)^2} = 165\,MPa$$

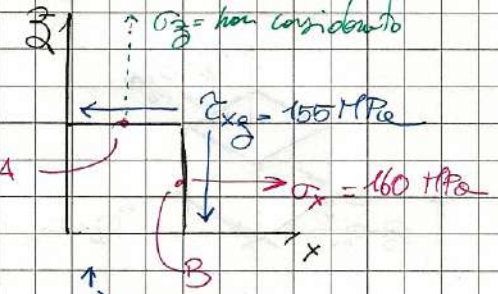
$$\sigma_I = \sigma_0 + \overline{OB} = 269\,MPa$$

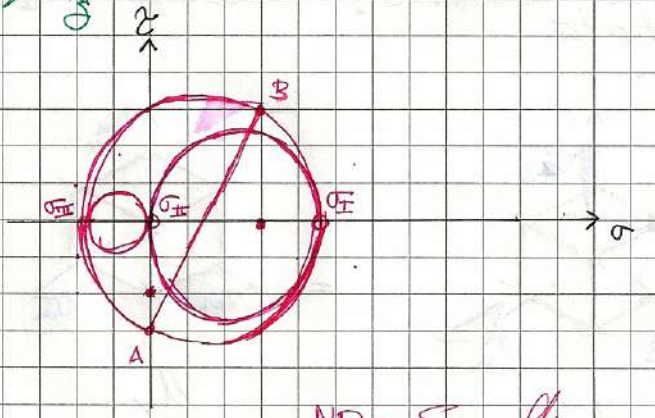
$$\sigma_{II} = 0$$

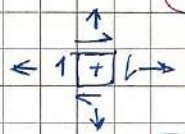
$$\sigma_{III} = \sigma_0 - \overline{OB} = -61\,MPa$$

$$\sigma_{Gf}^* = \sigma_I - \sigma_{III} = 269 - (-61) = 340\,MPa \leq \sigma_{amm} = \frac{R_{sn}}{\gamma_z = 1.5}$$

Qui tagliamo lo scarto verde di coerenza grande = trascuriamo lo sforzo σ_z







$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x}{2} = 80\,MPa$$

$$\overline{OB} = \sqrt{\tau_B^2 + (\sigma_x - \sigma_0)^2} = 174\,MPa$$

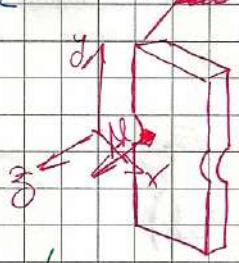
$$\sigma_I = \sigma_0 + \overline{OB} = 254\,MPa$$

$$\sigma_{II} = 0$$

$$\sigma_{III} = -94\,MPa$$

$$\sigma_{Gf}^* = \sigma_I - \sigma_{III} = 348\,MPa$$

NB: Se dilatazione termica non può avvenire per un bottone e per un albero, è il ragionamento nelle σ_z non va applicato perché il subito non è in direzione dell'asse e quindi le σ_z non sono alle deformazioni



Anche avendo un incarico di +5% quindi trascuriamo lo σ_z, quindi è accettabile perché approssimiamo in favore della sicurezza

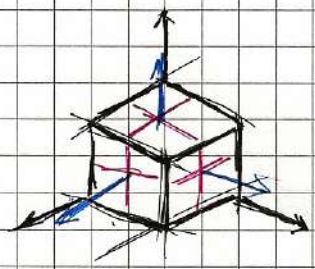
Criterio di Von-Mises

Criterio basato sull'energia di distorsione per unità di volume

$U_d \leq U_{d,s}$ ← Energia in prova di trazione che produce lo snervamento

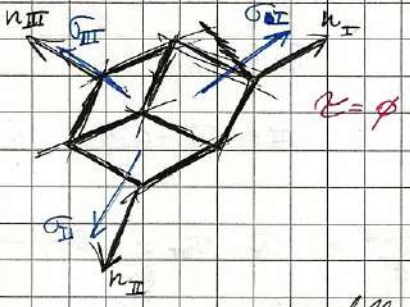
Se questa condizione viene rispettata il componente rimane in campo elastico.

Dato uno stato di sforzo, il primo passaggio è riconoscerlo nella sistema di riferimento principale

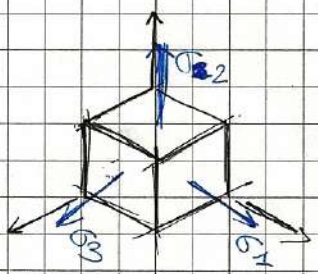


$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$

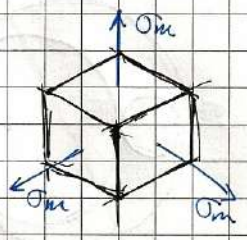
$\vec{n}_I, \vec{n}_{II}, \vec{n}_{III}$



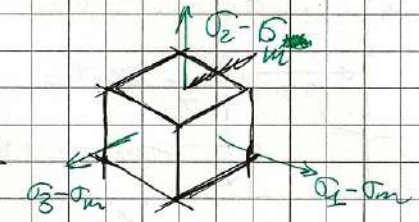
Questo serve a semplificare i calcoli, siccome non avrò delle τ che considerare. Andremo a sostituire σ_I, σ_{II} e σ_{III} con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ per praticità



$=$



$+$



U_t — Energia di deformazione elastica per unità di volume totale

U_v — Energia di deformazione elastica associata ad un unità di volume

U_d — Energia di distorsione per un unità di volume

- $U = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$ ← Energia per la deformazione

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_3 + \sigma_1)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

A questo punto calcolo u_d, quindi:

$u_{tot} = u_v + u_d \Rightarrow u_d = u_t - u_v$

Poiché elimino ε e ottengo tutto in funzione degli sforzi: σ

$$u_t = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right] \quad (I)$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Utilizzo l'equazione di u_t per calcolare l'equazione u_v

$\sigma_1 \to \sigma_m$, $\sigma_2 \to \sigma_m$, $\sigma_3 \to \sigma_m$

$$u_v = \frac{1}{2E}\left[3\sigma_m^2 - 2\nu\left(3\sigma_m^2\right)\right] = \frac{3\sigma_m^2}{2E}\left(1-2\nu\right) =$$

$$= \frac{3(1-2\nu)}{6\cdot 2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right)\cdot\frac{1}{9} \quad (II)$$

Ora posiamo usare l'equazione I e II per calcolare u_t

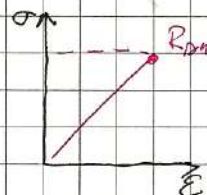
$$u_d = u_t - u_v = \frac{1+\nu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{1+\nu}{3E}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)$$

$\frac{1}{2E} - \frac{1-2\nu}{6E}$ $\qquad$ $-\frac{2\nu}{2E} - \frac{1-2\nu}{6E} =$

$\frac{2+2\nu}{6E} = \frac{1+\nu}{3E}$ $\qquad$ $= \frac{-3\nu - 1 + 2\nu}{3E} = -\frac{1+\nu}{3E}$

$$u_d = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]$$

Il criterio di Tresca dice che $u_d \le u_{d,rm}$ dove $u_{d,rm}$ è calcolato (è una retta) dalla prova di trazione. Applichiamo allora la formula appena trovata ad una prova di trazione in cui otteniamo



$$u_{d,\text{prova trazione}} = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma^2\right] = u_{d,rm} = \frac{1+\nu}{3E}\cdot R_{sm}^2$$

$\sigma = R_{sm}$

Applicando il criterio otteniamo:

$$\sqrt{\frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right)\right]} \le \frac{1+\nu}{3E}\,R_{sm}^2$$

Quindi:

$$\sigma_{VM}^* = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right)} \le \frac{R_{sm}}{\gamma}$$

$\gamma = 1{,}5$

A noi interessa calcolare U_d, quindi:

$$U_{tot} = U_v + U_d \Longrightarrow U_d = U_t - U_v$$

Poiché elimino ε e ottengo tutto in funzione degli sforzi: $f(\sigma)$

$$U_t = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right] \quad (I)$$

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

Utilizzo l'equazione di U_t per calcolare l'equazione U_v

$$\sigma_1 \to \sigma_m \quad , \quad \sigma_2 \to \sigma_m \quad , \quad \sigma_3 \to \sigma_m$$

$$U_v = \frac{1}{2E}\left[3\sigma_m^2 - 2\nu\left(3\sigma_m^2\right)\right] = \frac{3\sigma_m^2}{2E}\left(1 - 2\nu\right) =$$

$$= \frac{3}{6\cdot 2E}\left(1-2\nu\right)\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right)\cdot\frac{1}{9} \quad (II)$$

Ora possiamo usare l'equazione I e II per calcolare U_d

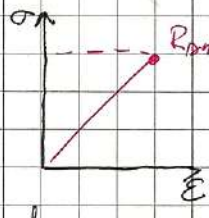
$$U_d = U_t - U_v = \frac{1+\nu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{1+\nu}{3E}\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)$$

$$\frac{1}{2E} - \frac{1-2\nu}{6E} \qquad -\frac{2\nu}{2E} - \frac{1-2\nu}{6E} =$$

$$\frac{2+2\nu}{6E} = \frac{1+\nu}{3E} \qquad = \frac{-3\nu - 1 + 2\nu}{3E} = -\frac{1+\nu}{3E}$$

$$U_d = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]$$

Il criterio ci dice che $U_d \leq U_{d,sn}$ dove $U_{d,sn}$ è calcolato (è una retta) dalla prova di trazione. Applichiamo allora la formula appena trovata ad una prova di trazione di cui conosciamo



$$U_{d,\text{prova trazione}} = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma^2\right] \underset{\sigma = R_{sn}}{=} U_{d,sn} = \frac{1+\nu}{3E}\cdot R_{sn}^2$$

Applicando il criterio otteniamo:

$$\sqrt{\frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right)\right]} \leq \frac{1+\nu}{3E}\,R_{sn}^2$$

Quindi:

$$\sigma_{VM}^* = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right)} \leq \frac{R_{sn}}{\gamma}$$

$\gamma = 1{,}5$

Scrittura alternativa del criterio poiché essere:

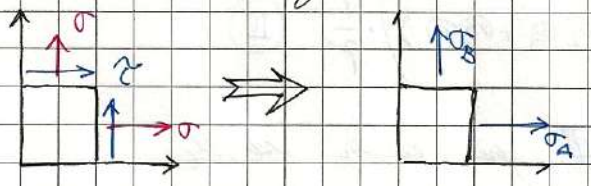
$$\sigma_{VM}^{*} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$

$$\sigma_{VM}^{*} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ciò significa che il criterio non dipende dal sistema di riferimento scelto.

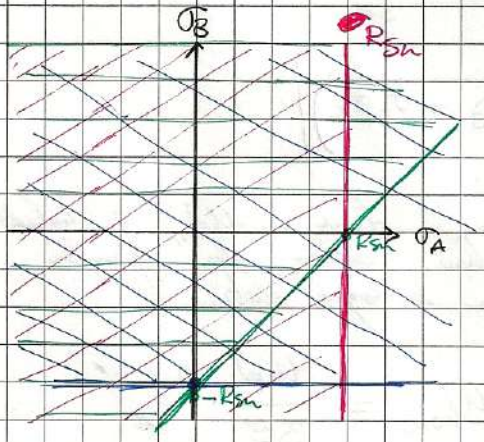
Confronto dei due ~~criteri~~ criteri

Consideriamo il seguente sottocaso di stato di sforzo piano:



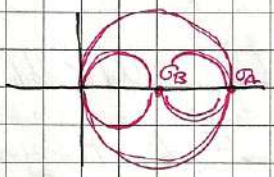
Introduciamo, dopo questo passaggio, la superficie di snervamento:

→ Dato un materiale con un certo R_{SN}, applichiamo i criteri e riportiamoli nel grafico.



$\sigma_{GT}^{*} = \sigma_I - \sigma_{III} \leq R_{SN}$

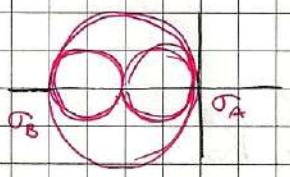
→ $\sigma_A \geq \sigma_B$



$\sigma_A \geq \sigma_B \geq \emptyset$

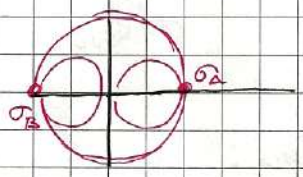
$\sigma_A - \emptyset \leq R_{SN}$

→ $\emptyset \geq \sigma_A \geq \sigma_B$



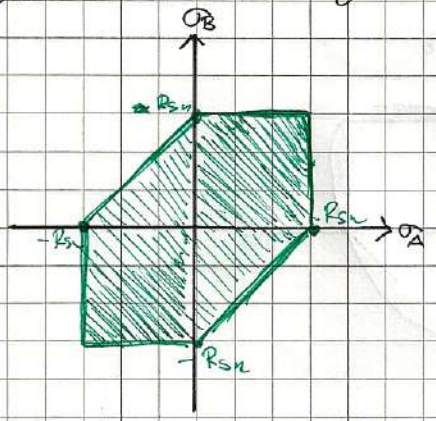
$\emptyset - \sigma_B \leq R_{SN}$

→ $\sigma_A \geq \emptyset \geq \sigma_B$



$\sigma_A - \sigma_B \leq R_{SN}$

Riprendendo i tre passaggi per la condizione $\sigma_B \geq \sigma_A$, otteniamo sul grafico il seguente poligono



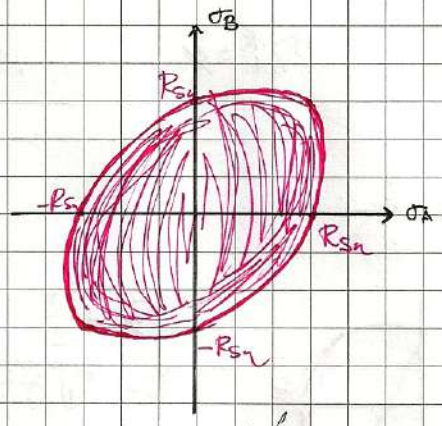
L'area di questo poligono è il dominio elastico del materiale secondo il criterio di Gest-Tresca.

Se i due sforzi principali del suo corrente in sforzo piano sono contenuti dall'interno dell'area del poligono, allora il corrente è in campo elastico

Nello stesso caso di sforzo piano, l'espressione del criterio di Von-Mises, si scriverà:

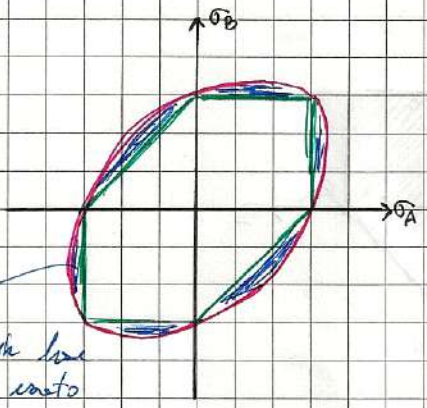
$$\sigma_{VM}^{*} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - \sigma_{AB}} \leq R_{sn}$$

Essa è anche l'equazione di una ellisse ruotata, passante per i vertici del ~~dominio~~ poligono rappresentativo del dominio elastico:



Da ciò deduciamo che Von-Mises, a differenza di Gest-Tresca è derivabile.

Quindi importante è capire lo sforzo non cicla in entrambi i domini:



ci vengono date tutte le informazioni di cui ha bisogno il criterio visto

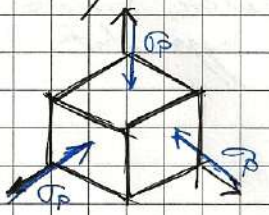
In questo contesto il criterio di Guest-Tresca ci dice che non siamo in campo elastico, mentre il criterio di Von-Mises ci dice il contrario.

→ Il criterio di Guest-Tresca è più conservativo

→ Il criterio di Von-Mises è più vicino ai risultati sperimentali

Casi particolari:

→ pressione puntuale idrostatica

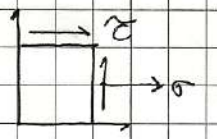


$\sigma_{GT}^* = 0$

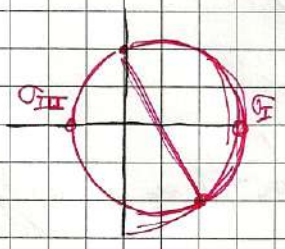
$\sigma_{VM}^* = 0$

I criteri, per la loro definizione e formulazione non possono funzionare.

Casi tipici dei nostri esercizi:



flessione o azione assiale + Torsione



$\sigma_\phi = \frac{\sigma}{2}$

$\tau = \sqrt{\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma}{2}\right)^2}$

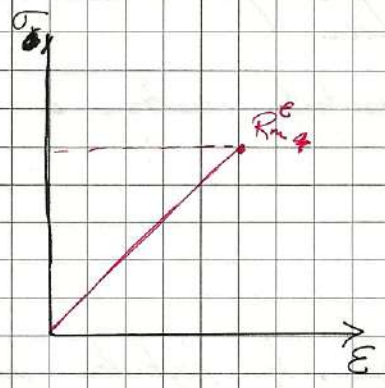
$\sigma_{I,III} = \sigma_\phi \pm \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2}$

- $\sigma_{GT}^* = \sigma_I - \sigma_{III} = [illegible] = 2\sqrt{\tau^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

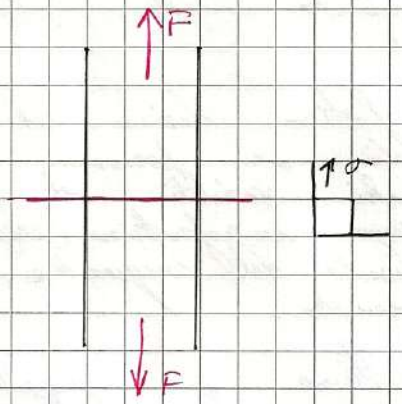
- $\sigma_{VM}^* = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I \sigma_{III}} = \sqrt{3\tau^2 + 4\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$

Criterio di Galileo-Rankine-Navier

Consideriamo un provino sottoposto a trazione di un materiale fragile



- Si osserva che il punto di rottura del provino si trova sul piano in cui agisce la massima sollecitazione principale:



Quindi, naturalmente, il criterio non può che essere il seguente:

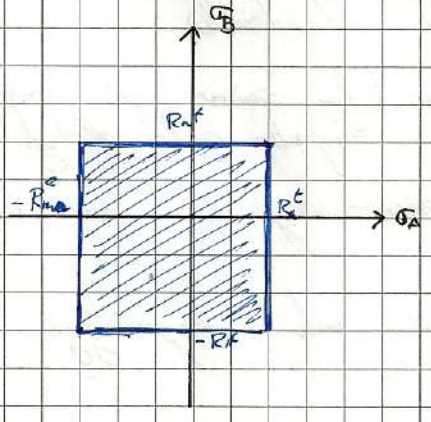
$$\sigma_{id,I} \leq \frac{R^t_{sn}}{k_{fragili}}$$

Per materiali fragili $k = 3$

e, siccome ordinariamente le sollecitazioni in base alle quali si progetta non è quella di compressione e taglio, dovrà risultare anche che:

$$\sigma_{id,II} \geq \frac{R^c_m}{k_{fragili}}$$

- Ne segue che il dominio elastico di un materiale fragile sarà rappresentabile da il seguente poligono:



Fatica nei materiali metallici

Nel corso della storia moderna sono spesso apparse rotture improvvise e impreviste in organi e strutture di macchine. Tali rotture sono state osservate in punti poco sollecitati dal punto di vista della della resistenza statica

Esempi di componenti meccanici che hanno mostrato rotture a causa di forze variabili nel tempo sono:

- Assi di locomotive
- Strutture, componenti e fusoliere di aerei
- Alberi a gomito
- Ingranaggi

La parola fatica deriva dal latino fatigare. In particolare il termine si riferisce a fenomeni microstrutturali di danneggiamento dovuti a carichi variabili nel tempo che causano il nascere di una microfrattura (cricca). Tale cricca, propagandosi, porta al cedimento del componente, cioè al di sotto del carico limite di snervamento.

Il vostro spazzolino è progettato a vita infinita a fatica. (10^{10} cicli)

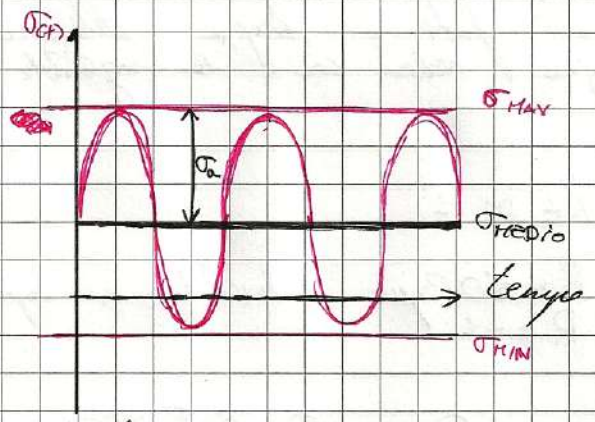
In generale i carichi nelle macchine non sono costanti, ma variano nel tempo e il loro andamento dipende da molti fattori esterni (esempio: guida nervosa, stradizzo ecc.)

Fenomenologia del processo di fatica nei materiali metallici

1) Nucleazione della cricca. Avviene in due possibili modi
   - A partire da un materiale integro in un punto dove è presente una zona ad elevata sollecitazione a seguito della cosiddetta slip band formation
   - A partire da un difetto preesistente
2) Stage I di propagazione (forte effetto della microstruttura del materiale)
3) Stage II di propagazione (la cricca si propaga in direzione ortogonale rispetto allo sforzo principale normale)
4) Rottura finale (la cricca raggiunge una lunghezza critica

Noi ci occuperemo solo di questo argomento

Il nostro percorso tipico prende in analisi dal tensore nel tempo di carattere sinusoidale:



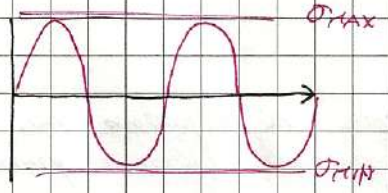
Un parametro che ci indica come è assegnato lo sforzo medio è il "rapporto di ciclo"

$$R = \frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}}$$

I due casi nel nostro corso studiamo:

1) FATICA ALTERNATA

$R = -1 \longrightarrow \sigma_{MAX} = -\sigma_{MIN}$



$\sigma_{medio} = 0$

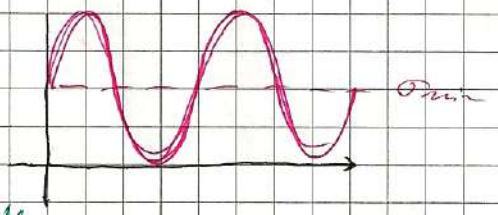
$\sigma_a = \sigma_{MAX}$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

2) FATICA PULSANTE

$R = 0 \longrightarrow \sigma_{MIN} = 0$



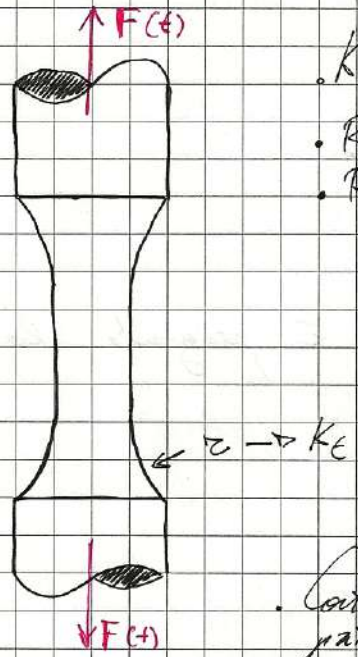
$\sigma_a = \sigma_m$

"Il nostro ciclo di riferimento sarà $R = -1$, perché è il tipico ciclo con cui facciamo le prove sperimentali.

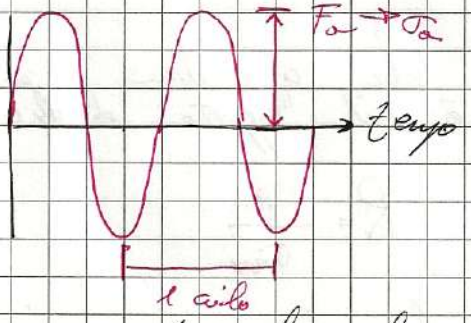
L'evidenza sperimentale ci dice che σ_{medio} "pesa" molto nella resistenza a fatica. Quando lo sforzo medio è maggiore di zero, diminuisce la resistenza a fatica

Prova di fatica

Per una prova a fatica bisogna utilizzare un provino sottoposto a trazione ciclica con le seguenti geometrie e caratteristiche:



- $K_t \simeq 1$
- $R_a \leq 0{,}3\ \mu m$ (lucidatura a specchio)
- $R = -1$

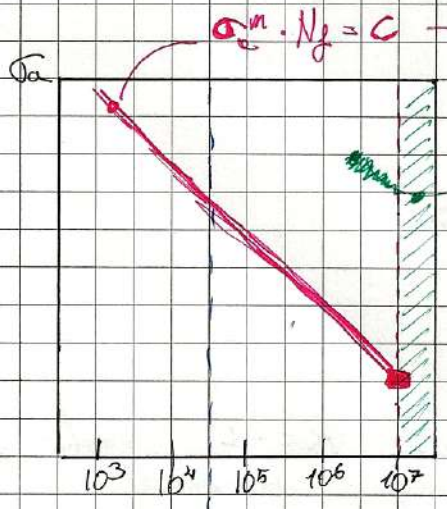


- Conto quanti cicli il provino sopporta prima di rompersi.

1 provino → σ_a, N_f

Numero di cicli a Rottura

I dati sperimentali ottenuti dalla prova si riportano su un diagramma di Wöhler → Il grafico della tensione provocata

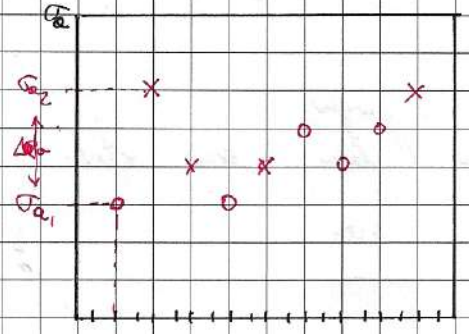


LCF ◁——▷ HCF

Low cicle fatigue: $\sigma_{ma} > R_{sn}$

High cicle fatigue: $\sigma_{ma} < R_{sn}$

Dalle prove di fatica a flessione, dalla quale ottenere il valore della tensione di riferimento: σ_{FA} → provini



X = rottura
O = Run-out (10^7)

Il numero di provini è 15.

↳ Individuiamo l'evento meno frequente

↳ Valore della σ_a dell'evento meno frequente

↳ $+\frac{\Delta\sigma}{2}$ se l'evento meno frequente è la condizione di run-out

$-\frac{\Delta\sigma}{2}$ se l'evento meno frequente è la condizione di rottura

Il limite di fatica si dice che un provino è sottoposto a fatica a $\sigma_a = \sigma_{FA}$ ha un 50% di probabilità di rottura o il 50% di probabilità di sopravvivere oltre i 10^7 numero di cicli.

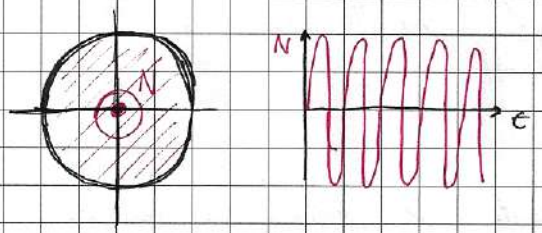
In fase progettuale, è quindi opportuno che sia rispettata la seguente condizione:

$$\sigma_a \leq \frac{\sigma_{FA}}{k}$$

Ora analizziamo l'effetto della sezione interna di σ_{FA}.

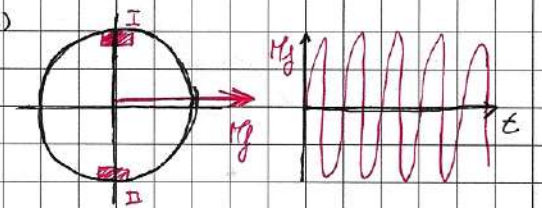
Partendo in considerazione un provino ho due opzioni per testare la resistenza a fatica:

1)

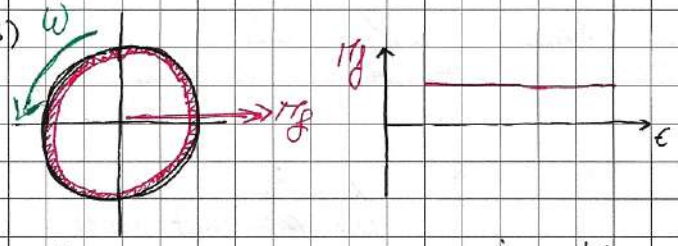


• In questo caso l'intera sezione è sottoposta alla forza di fatica provino

2)



• In questo caso la forza di fatica provino altera solo due punti: I e II

3) 

. Quindi punto del dente è sottoposto ad una sollecitazione di flessione

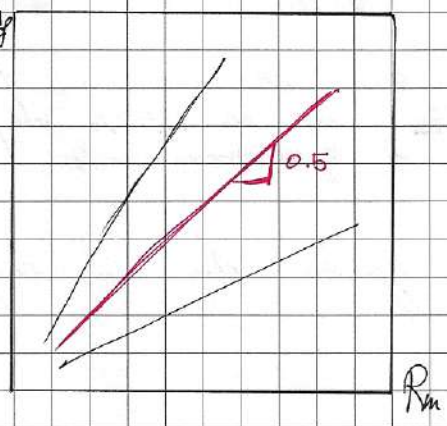
In tutti questi casi si ottiene uno stato di sforzo semplice:



Posso utilizzare una qualsiasi tra queste configurazioni, non ovvio risultato differente.

Considerando che una ruota dentata opera a 40 Hz e che bisogna raggiungere i 10^7 cicli, in circa 8 giorni, una configurazione sperimentale può durare anche più di due mesi di prove ininterrotte. Per questo motivo, spesso si ricorre a delle correlazioni:

. flessione →



. $\sigma_{FAf} \cong 0.6$

In generale le varie stime sperimentali ci danno queste correlazioni per i vari tipi di fatica:

- $\sigma_{FA_a} \cong 0.4\ R_m$ ← Assiale
- $\sigma_{FA_f} \cong 0.5\ R_m$ ← Flessione
- $\sigma_{FA_t} \cong 0.3\ R_m$ ← Torsione

. Questi sono i limiti di fatica stimati per un provino in condizioni ideali tratti in laboratorio.

"Queste sono condizioni IDEALI. Siamo nel nostro campo preferenziale peggio"

NB: Il limite di fatica trovato in laboratorio dipende dal materiale in esame

Nelle nostre verifiche non utilizzeremo il valore ideale di σ_{FA}, ma bensì uno modificato in base a queste caratteristiche:

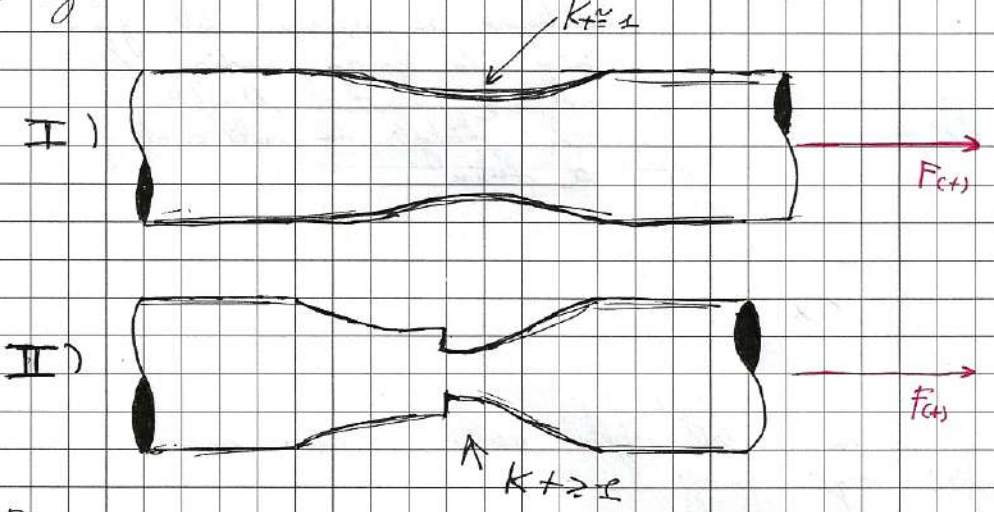
$$\sigma_{FA}' = \frac{\sigma_{FA} \cdot b_2 \cdot b_3}{K_g}$$

- Tutti i coefficienti di σ_{FA} hanno peggiorativi:

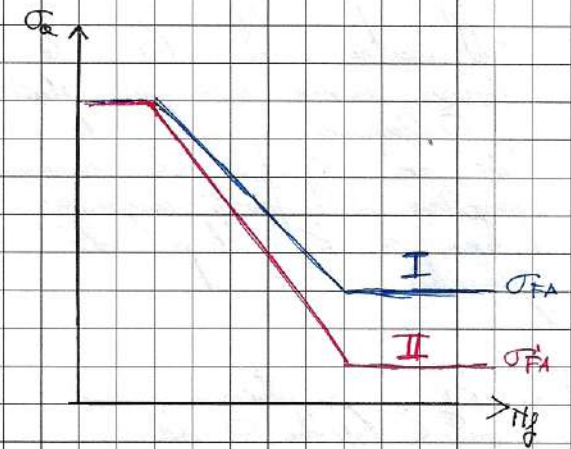
→ $0 \leq b_2, b_3 \leq 1$

→ $K_g \geq 1$

A fatica, portando di intagli costituiscono sia dalla geometria, (K_t sia dal materiale e dai suoi grani (d_{grano}). Ciò è stato provato con numerose sperimentazioni. Considerando in provini come di seguito:



Rappresentando i risultati sperimentali nel diagramma di Wöhler:



- Definiamo allora:

$$K_{sg} = \frac{\sigma_{FA}}{\sigma_{FA}'}$$

Introducendo un intaglio nella geometria del pezzo diminuisce la resistenza a fatica e inoltre:

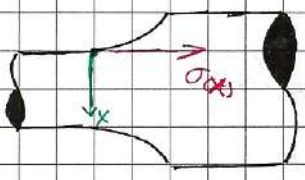
$$K_g \leq K_t$$

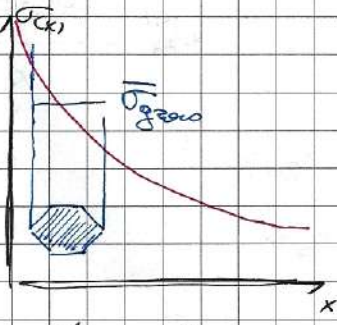
Da risultati empirici, troviamo una relazione tra K_g e K_t:

$$K_g = 1 + q(K_t - 1)$$

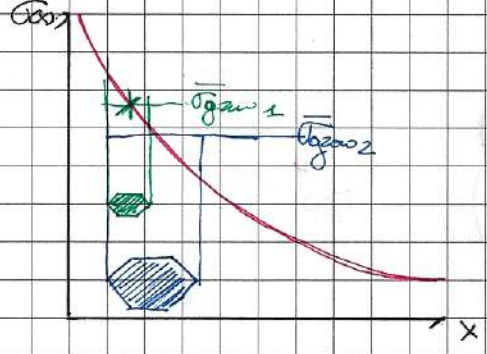
Sensibilità a fatica dell'intaglio → con $q \to 0$ non si ha influenza dell'intaglio nella fatica

Quando parliamo di resistenza a fatica, è molto importante prestare attenzione alla resistenza del componente e il suo materiale. Consideriamo una porzione del provino con un sistema di riferimento locale:



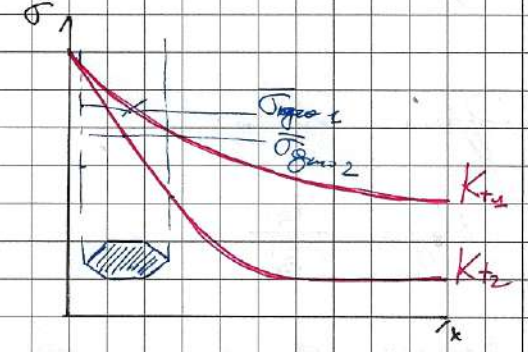


In condizioni statiche ci interessa lo sforzo massimo, a fatica ci interessa lo σ_{nom}. Cambiando la dimensione del grano cristallino:



. Cambiando la dimensione del grano varia lo sforzo medio che subisce e quindi l'effetto che intaglio ha sulla resistenza a fatica

Cambiando la geometria dell'intaglio invece, avremo un diverso distribuzione degli sforzi:



. $K_{t1} \ll K_{t2}$

. All'aumentare del K_t lo sforzo medio sul grano può diminuire.
Ciò non significa che dobbiamo progettare i nostri componenti con un K_t il più alto possibile.

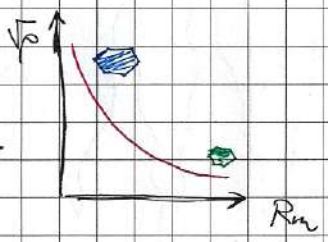
Riprendendo la relazione $\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom}$ ad esempio con questa relazione abbiamo un materiale e sforzo nullo. K_t e K_f ci danno informazioni ad esempio sulle caratteristiche del materiale e il parametro q ci dice l'influenza.

Utilizzando la relazione di Neuber, definisco q come:

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{r}}}$$

Dove:

- r = raggio dell'intaglio
- $\sqrt{\rho}$ = effetto del materiale (tabulato sperimentale) →



In generale, in progettazione, si vuole adoddisfare gli intagli diminuendo i raggi di raccordo nelle zone geometriche di trasizione. Facendo così diminuisce il K_t e di conseguenza diminuisce il K_f. Ciò però aumenta la sensibilità dell'intaglio a fatica e quindi un aumento del K_f:

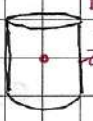
$r \uparrow$ ⟨ $K_t \downarrow \rightarrow K_f \downarrow\downarrow$ ⟷ contributo più significativo
$\sigma_q \uparrow \rightarrow K_f \uparrow$

Considerando invece il carico unitario di rottura:

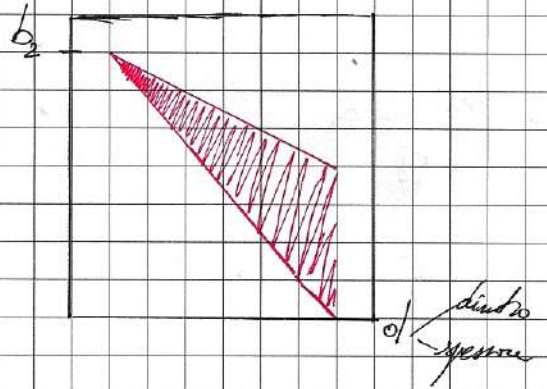
$R_m \uparrow$ ⟨ $\sigma_{Fa} \uparrow\uparrow$
$\sqrt{\rho} \downarrow \rightarrow q \uparrow \rightarrow K_f \uparrow$

Considerando poi gli altri coefficienti:

- b_2 → effetto delle dimensioni del componente → Effetto scala
  → Effetto gradiente → tanto dello sforzo sulla superficie del componente, diminuisce all'aumentare delle dimensioni.

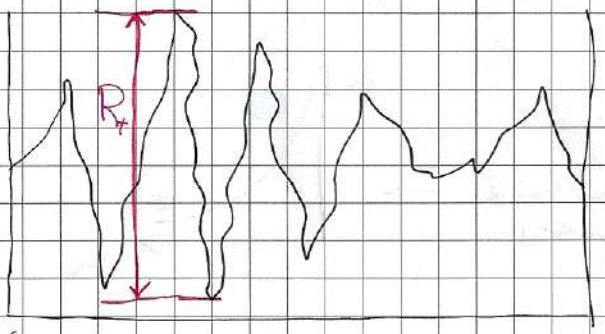


fornisce il valore medio tra i provini di rottura



- b_3 → Effetto della rugosità superficiale del cuneo

↳ $b_3 = \frac{\sigma_{FA}'}{\sigma_{FA}}$ ← reggiti grezzo
← reggiti $R_a = 3\,\mu m$



* Microscopicamente la rugosità grezza con una serie di intagli microscopici

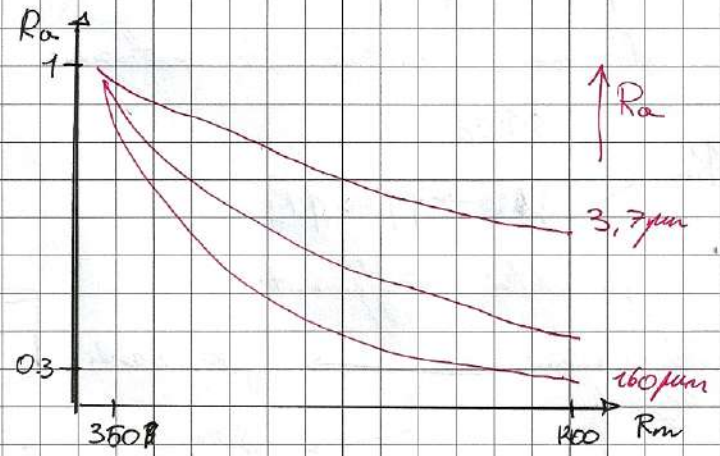
È inoltre da dire che il fattore b_3 è influenzato da:

→ R_t (Sh tra la "cima microscopica" più alta e la più bassa")

→ $\sigma_{grezzo} \rightarrow R_m$

Aggiungendo che $R_t \cong 4 \cdot R_a$, andiamo a costruire il seguente grafico:

→ b_3:



Riassumendo

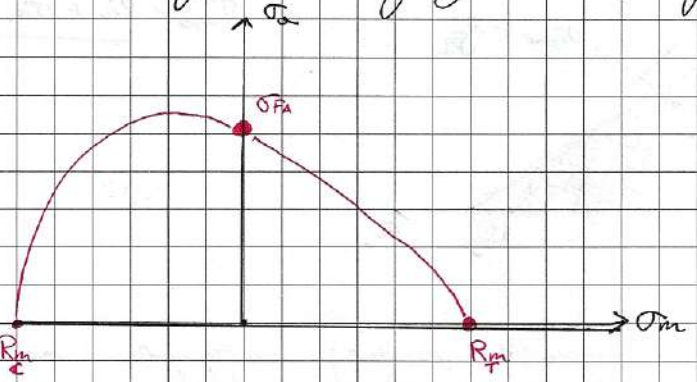
1) σ_{FA} ← $\sigma_{FAa} = 0.4\,R_m$; $\sigma_{FAf} = 0.5\,R_m$; $\sigma_{FAT} = 0.3\,R_m$

$$\sigma_{FA}' = \frac{\sigma_{FA} \cdot b_2 \cdot b_3}{K_f}$$

$$\sigma_{Rm} \leftarrow \sigma_{grezzo} = \frac{\sigma_{FA}'}{\eta} = \frac{\sigma_{FA} \cdot b_2 b_3}{K_f \cdot \eta}$$

Effetto della sforzo medio

Le trattazioni degli effetti dello sforzo medio iniziano con il diagramma di Haigh. Dobbiamo rappresentare come cambia il limite di fatica in funzione dello sforzo medio:



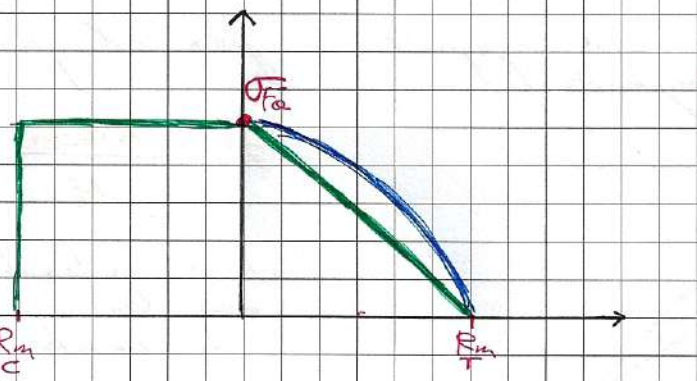
$$\sigma_{lim} = f(\sigma_m)$$

→ varia a seconda specifiche

Prendendo un provino e applicandogli uno sforzo di forza se le coordinate del punto (σ_a, σ_m) che identifica il provino stanno al di sotto della curva sperimentale allora il provino sopravvive, al di sopra si rompe entro i 10^7 cicli di riferimento.

Ovviamente questa curva, essendo ottenuta sperimentalmente, non è praticabile praticamente. Dobbiamo quindi fare un metodo alternativo per "sintetizzare" un diagramma di Haigh senza fare delle prove sperimentali.

Adottiamo quindi le seguenti semplificazioni



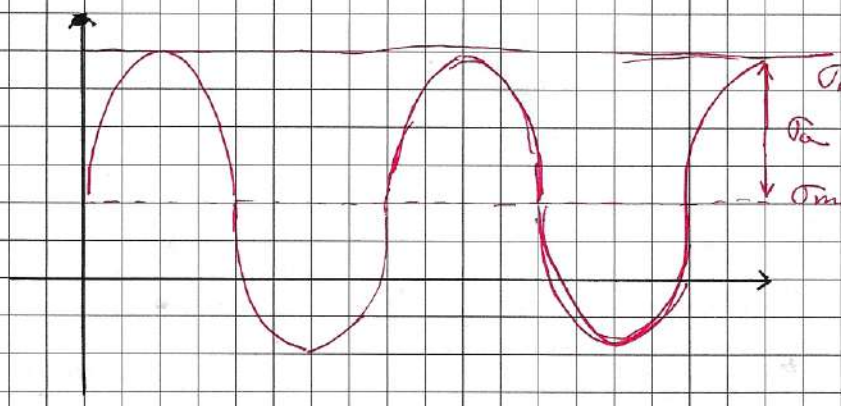
→ modello di Goodman

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{FA}} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1$$

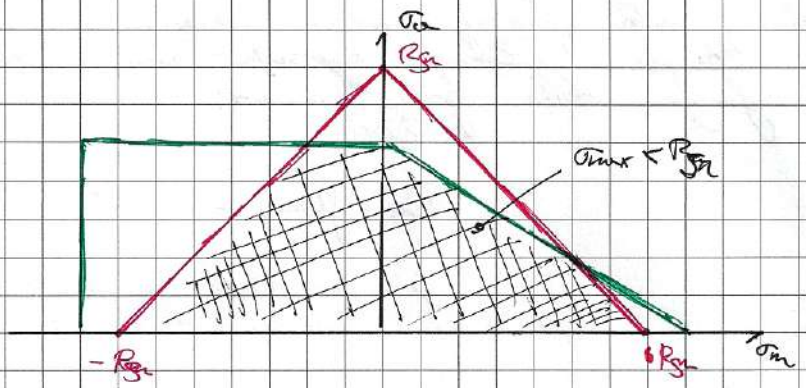
→ modello di Gerber

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{FA}} + \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^2 = 1$$

Un altro possibile modello è se le oscillazioni massime della fatica raggiungono il carico di snervamento $\sigma_{FA} = R_m$.



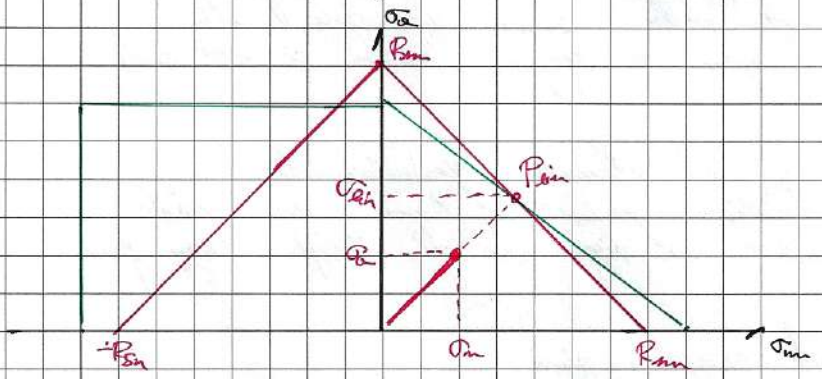
Possiamo scrivere questa condizione nel diagramma



$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a \leq R_{sm}$$

Rappresentiamo ora un componente (provino) sottoposto ad un sistema di forze alternato con $R = \phi$ (pulsante).

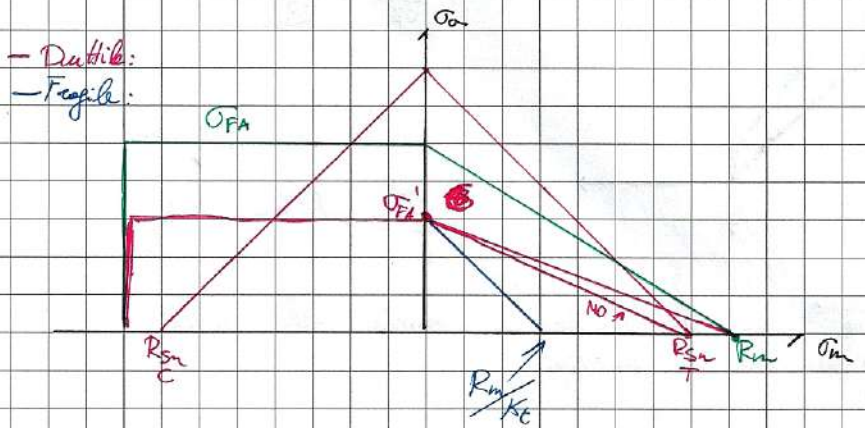
Sul diagramma possiamo rappresentare la sua curva di funzionamento



Possiamo calcolare il coefficiente di sicurezza come

$$\eta = \frac{\overline{OP_{im}}}{\overline{OP}} = \frac{\sigma_{ai}}{\sigma_a}$$

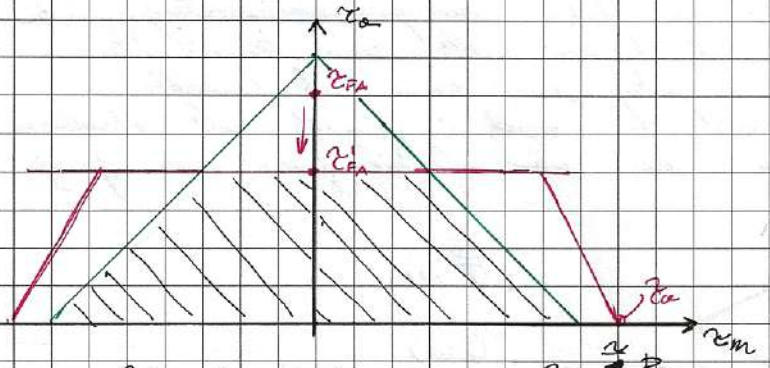
Adesso possiamo parlare delle proprietà a fatica dei vari materiali e fatica del componente.



$$\sigma_{FA}' = \frac{\sigma_{FA} \cdot b_2 \cdot b_3}{K_f}$$

• Per i materiali fragili devo tenere presente il fattore di intaglio

Torniamo anche tracciare un altro diagramma di Haigh per gli sforzi $\tau_{a(1)}$ di [illegible] sul componente



- Sperimentalmente si è visto che la sollecitazione tangenziale media ha poco effetto nullo sollecitazione a fatica. Si può assumere che il limite di fatica non è influenzato da una componente media τ_m

$\tau_a = 0.8 R_m$

- $\tau_{max} = \tau_m + \tau_a \leq \tau_{sn} \longrightarrow \tau_m \leq \frac{R_s}{\sqrt{3}}$

I passaggi per la risoluzione di problemi a fatica sono quindi:

R_m, R_{sn}

↓ Ricavo il limite di fatica alternato

σ_{FA}

↓ Correggiamo usando $\sigma'_{FA} = \frac{\sigma_{FA} \cdot b_2 b_3}{k_f}$

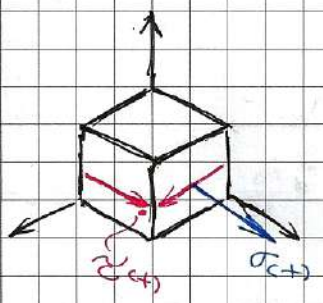
σ'_{FA}

SE $R_t = 1$ ↓ Usiamo il diagramma di Haigh $\eta = \frac{\overline{\sigma' \sigma_m}}{\overline{OP}} = \frac{\sigma_{am}}{\sigma_a}$

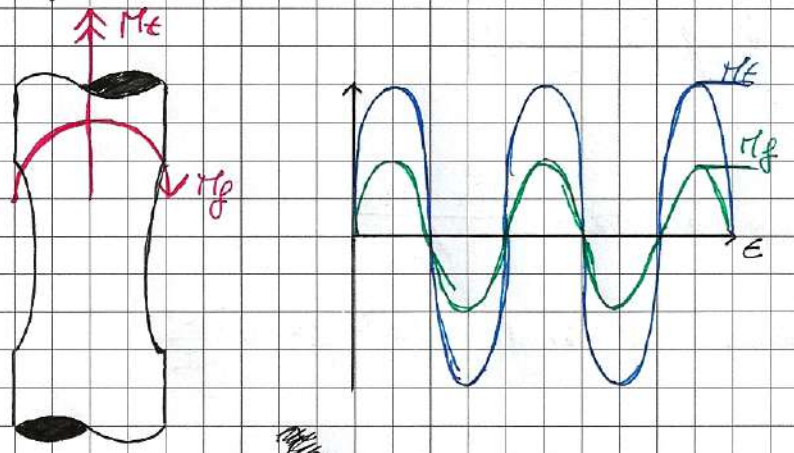
σ_{lim}

Fatica Multiassiale

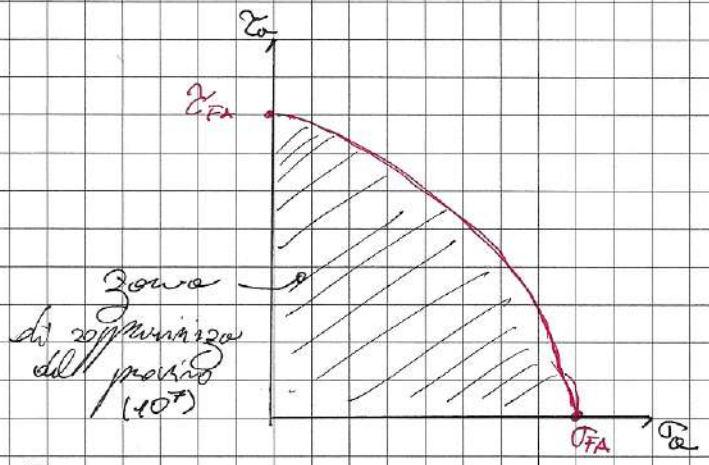
In componenti reali, gli sforzi che variano nel tempo e che quindi provano generano sollecitazioni a fatica ~~non più assiali~~ si trovano non più assiali allo stesso tempo. Per tenere conto di questi casi, in questo corso, usiamo il modello di Gough-Pollard (caso particolare) che ~~ci~~ permette di studiare i casi in cui sia la ripartizione degli sforzi di questo tipo:



Le prime sperimentazioni su questo tipo di sforzi vennero eseguite su una macchina capace di imporre uno sforzo a flessione e torcente simultanei e indipendentemente variabili



Furono ottenute così seguenti diagrammi:



$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{FA}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{FA}}\right)^2 = 1$$

Per evitare la rottura del provino per un generico σ_a e τ_a devono quindi essere rispettate la seguente condizione:

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{FA}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{FA}}\right)^2 \leq 1$$

Eseguiamo i seguenti passaggi algebrici nella condizione

$$\sigma_{FA}^2 \left[\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{FA}} \right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{FA}} \right)^2 \right] \leq \sigma_{FA}^2$$

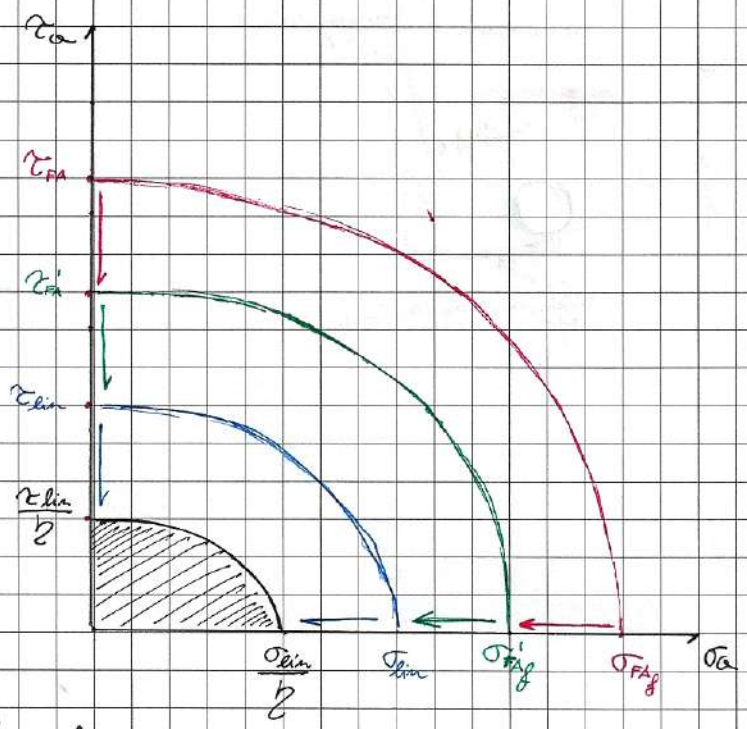
$$\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{FA}}{\tau_{FA}} \right)^2 \tau_a^2} \leq \sigma_{FA}$$

Otteniamo il seguente criterio:

$$\sigma_{gP}^* = \sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{FA}}{\tau_{FA}} \right)^2 \tau_a} \leq \sigma_{FA}$$

- $\frac{\sigma_{FA}}{\tau_{FA}}$ può essere a volte indicato con H

Nel corso del tempo questo modello criterio è stato esteso per utilizzo su componenti reali e non solo su provini ideali:



- Provino / $\sigma_{FA} \cong 0.5\ R_m$ / $\tau_{FA} \cong 0.3\ R_m$
- Materiale (acciaio)
- $R \geq 1$
- $b \cong 2$

Per il componente reale, il criterio di Gough-Pollard diventa

$$\sigma_{gP}^* = \sqrt{\sigma_a^2 + H^2 \cdot \tau_a^2} \leq \frac{\sigma_{limite}}{b}$$

con $H = \frac{\sigma_{lim}}{\tau_{lim}}$

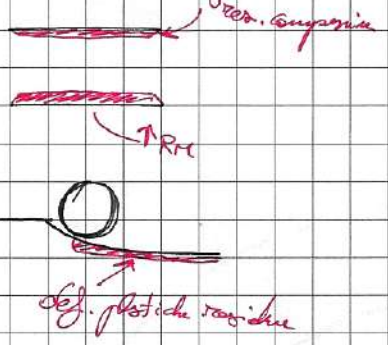
Per essere certi di operare sempre in un regime di rinaggio, il criterio è stato modificato nell caso in cui alcuni sforzi rimangano costanti:

	σ	τ	σ_{lim}	τ_{lim}
$\sigma(t)$ $\tau(t)$	$\sigma_{a,non}$	$\tau_{a,non}$	$\sigma_{a,lim}$	$\tau_{a,lim}$
$\sigma(t)$ $\tau=cost$	$\sigma_{a,non}$	$K_t \tau_{m,non}$	$\sigma_{a,lim}$	$\tau_{sm} = \frac{R_{p0,2}}{\sqrt{3}}$
$\sigma=cost$ $\tau(t)$	$K_t \sigma_{m,non}$	$\tau_{a,non}$	R_{sm}	$\tau_{a,lim}$

Effetti sforzi residui

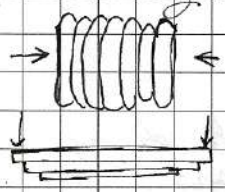
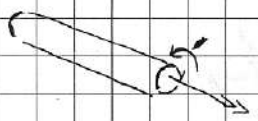
→ Cementazione / Nitrurazione

→ Rullatura / Pallinatura

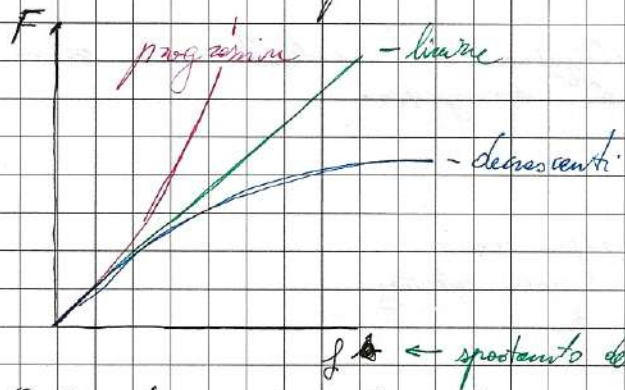


Molle

Le molle possono essere classificate in base alla tipologia di sollecitazione a cui le fune è soggetta:

- Assiali → 
- Flessione →
- Torsione →  → le molle ad elica non vengono sollecitate a torsione, perché nella sezione si ha un momento flettente

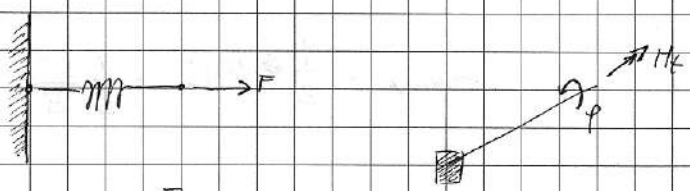
Una caratteristica fondamentale delle molle è la loro caratteristica



Quello che contraddistingue le tre tipologie è il comportamento relativo alla rigidezza:

$$K = \frac{dF}{df} \longleftrightarrow \text{pendenza della curva caratteristica}$$

La rigidezza dipende da dal tipo di ~~forze esterne~~ che le fanno subire:



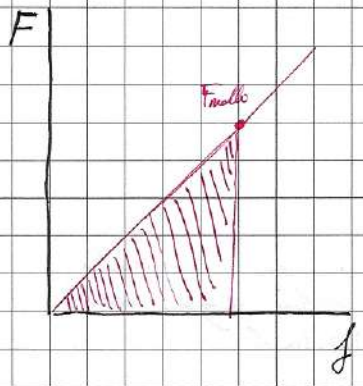
$$K = \frac{F}{f} \qquad K = \frac{M_t}{\varphi}$$



$$K = \frac{M_f}{\alpha}$$

Energia assorbita dalla molla

L'energia che la molla assorbisce sotto carico è pari all'area sotto della curva caratteristica:



- In caso di rottura di una molla diviene l'equazione sarà

$$L_{max} = \frac{1}{2} F_{max} \cdot f_{max}$$

Coefficiente di Utilizzazione

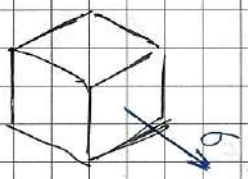
È un coefficiente che dice quanto utilizziamo del materiale della nostra molla dal punto di vista dell'assorbimento energetico

$$m = \frac{L_{max}}{V \cdot Z_{max}}$$

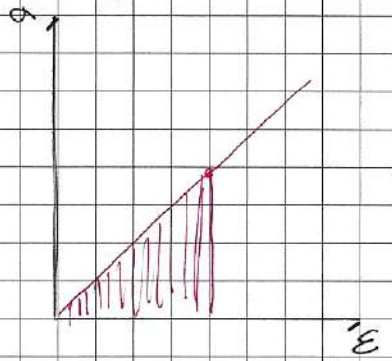
V = Volume

Z_{max} → energia specifica riferita al punto di corretta utilizzazione della molla

Se la mia molla è soggetta a una forza assiale o flessionale avrà una sforzo di questo tipo:



In questo caso Z_{max} sarà dato dall'area sotto al diagramma sforzo deformazione



$$Z_{max} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}$$

Stesso concetto quando abbiamo solo sforzi di tipo τ:

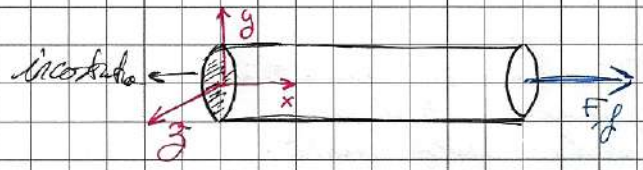


$$\rightarrow \tau_{max} = \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\frac{\tau}{G}$$

Esistono poi molte serie di coefficienti che non vengono trattati in questo corso, ma che comunque è importante sapere

- $\eta_v = \frac{L_{max}}{V}$ ← Coefficiente di utilizzazione del volume
- $\eta_Q = \frac{L_{max}}{Q}$ ← Coefficiente di utilizzazione rispetto al peso della molla

Esempio ②: Barra soggetta a forza assiale



K? m? σ_{max}?

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \varepsilon_x \cdot l = f$$

(Δl: solo un cedimento di vincolo)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$K = \frac{F}{f} = \frac{\sigma \cdot A}{f} = \frac{\sigma \cdot A}{\varepsilon_x \cdot l} = \frac{\sigma \cdot A}{\frac{\sigma}{E} \cdot l} = \frac{E \cdot A}{l}$$

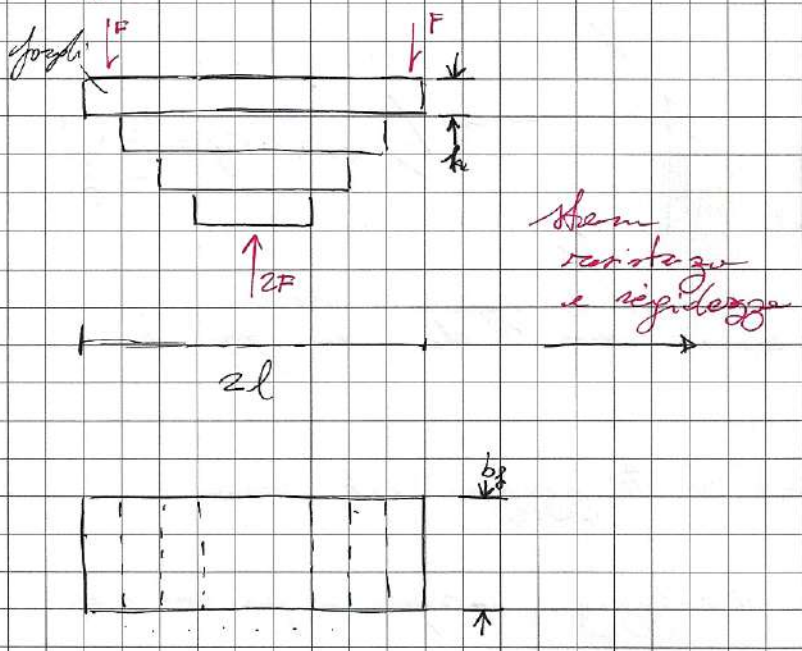
$$m = \frac{L_{max}}{V \cdot \tau_{max}} \qquad L_{max} = \frac{1}{2} F \cdot f = \frac{F^2}{2K}$$

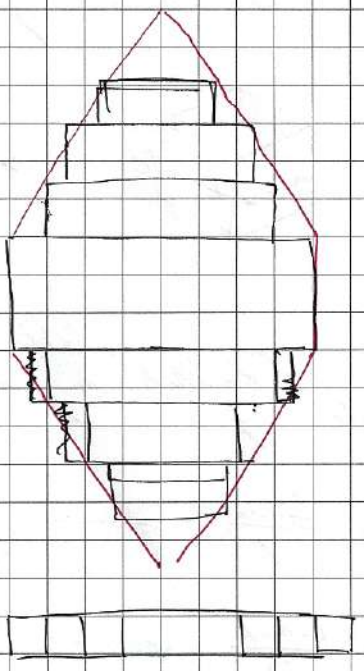
($K = \frac{F}{f} \rightarrow f = \frac{F}{K}$)

- $V = A \cdot l$
- $\tau_{max} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} = \frac{F^2}{2A^2E}$

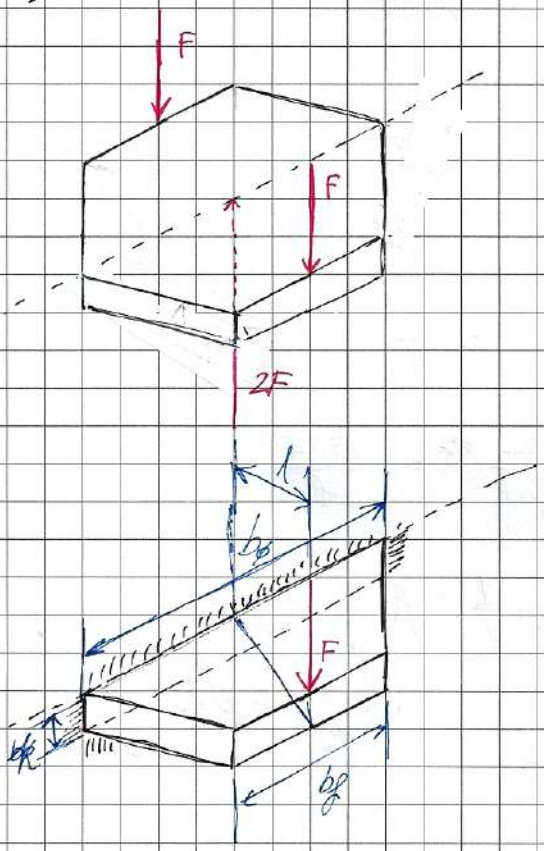
$$m = \frac{L_{max}}{V \cdot \tau_{max}} = \frac{F^2}{2K} \cdot \frac{l}{Al} \cdot \frac{2A^2E}{F} \cdot \frac{l}{EA} = 1$$

Esempio ②: Molla a balestra





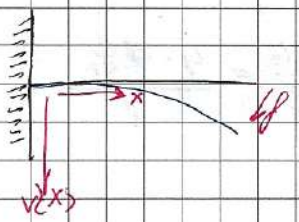
Ridisegnando in maniera più fatta sopra:



- Siccome è simmetrico possiamo studiarne anche solo metà.

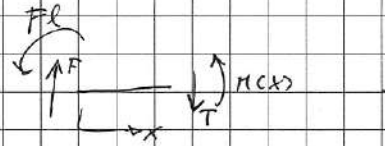
- Dobbiamo quindi ricalcolare il problema usando solo l'asse elastico

Risoluzione del problema della linea elastica associato:



$(+) M_f$

$$v''(x) = -\frac{M(x)}{E J(x)} \qquad K = \frac{F}{f}$$



$$M(x) + F \cdot l - F x = 0$$

$$M(x) = Fx - Fl = Fl\left(\frac{x}{l} - 1\right)$$

$$\sigma_{max}(x) = \frac{M(x)\frac{h}{2}}{J(x)}$$ ← funzione di x

$$\frac{J}{J(x)} = \frac{b(x)h^3}{12} \rightarrow b(x) = b_0 + \frac{b_f - b_0}{l} x$$

Predimensiono la mensola

→ L = dato di progetto

F = dato di progetto → Incognite: h, b_0, b_f

K = dato di progetto

Ipotizziamo $b_f = 0$

$$b(x) = b_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$ ← nella trave $b_f = 0$

$$\sigma_{max}(x) = \frac{M(x)\cdot\frac{h}{2}}{J(x)} = \frac{M(x)\cdot\frac{h}{2}}{\frac{b(x)\cdot h^3}{12}} = \frac{6\cdot Fl\left(\frac{x}{l} - 1\right)}{h^2 b_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)} = \left|\frac{6Fl}{h^2 b_0}\right|$$

$$v''(x) = -\frac{M(x)}{EJ(x)} = +\frac{Fl\left(\frac{x}{l} - 1\right)}{E\frac{b_0\left(1 - \frac{x}{l}\right)h^3}{12}} = \frac{12Fl}{Eb_0h^3}$$

$$v'(x) = \frac{12Fl}{Eb_0h^3}x + A$$

$$v(x) = \frac{6Fl}{Eb_0h^3}x^2 + Ax + B$$

$x_0 \rightarrow v'_0 = 0$

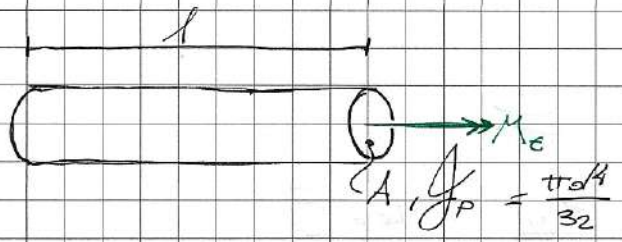
$\quad\; v = 0$

$$v(x) = -\frac{6Fl}{Eb_0h^3}x^2$$

$$K = \frac{F}{f} = |v(x=l)| =$$

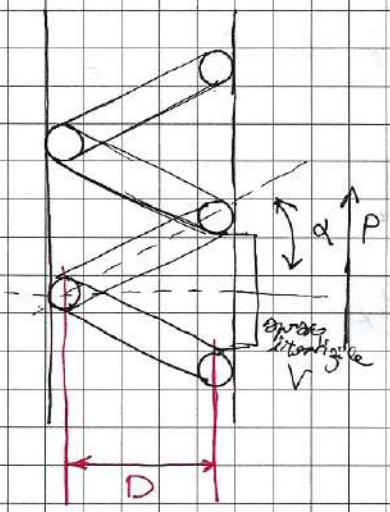
$$K = \frac{F\,E\,b_0h^3}{6Fl} = \frac{Eb_0h^3}{6l}$$

Esempio ③: Barra a Torsione



$$K_T = \frac{M_t}{\varphi} = \frac{G \cdot J_p}{l}$$

Esempio ④: Molla ad elica



d: diametro filo

D: diametro avvolgimento

α: Angolo elica

P: passo

$\tan \alpha = \frac{P}{\pi D}$

$V < p - d$

i = numero di spire

$H = p \cdot i = \tan \alpha \cdot \pi D \cdot i$

$l = \pi D \cdot i$

Ogni punto della molla è sollecitato dalle stesse azioni



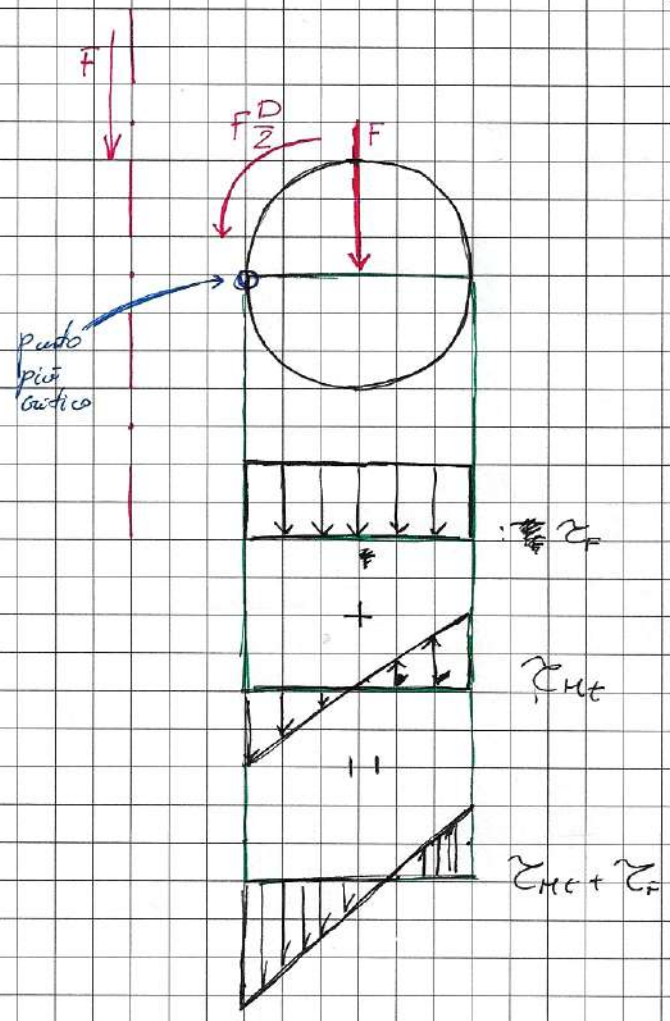
$M_t = M \cdot \cos \alpha = F \frac{D}{2} \cos \alpha \cong F \frac{D}{2}$

$M_f = M \cdot \sin \alpha \cong 0$

$T = F \cdot \cos \alpha \cong F$

$N = F \cdot \sin \alpha \cong 0$

Osserviamo una molla: (ingrandita per effetto drammatico)



- Diametro caratteristico: $C = \frac{D}{d}$

- $\tau_{max} = \tau_{MT} + \tau_F = \frac{16 \cdot M_t}{\pi d^3} + \frac{4}{3}\frac{F}{A}$

$= \frac{8FD}{\pi d^3} + \frac{4}{3}\frac{F \cdot 16}{\pi d^2} =$

$= \frac{8FD}{\pi d^3}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{d}{D}\right)$

$= \tau_{Mt}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{1}{C}\right) =$

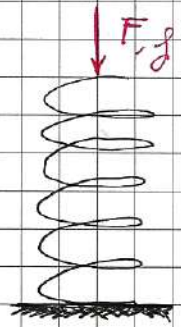
$= \tau_{Mt} \cdot K_S > 1$

$K_S \rightarrow K_W$ Wahl

Taglio — Curvatura

$K_W = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C} \longrightarrow \tau_{max} = \tau_{Mt} \cdot K_W$ e quindi $K_W > K_S$

Studiamo ora la rigidezza con una visione ad energia:



$K = \frac{F}{f}$



Trascuro il taglio
Trascuro curvatura

$L_{max} = \frac{1}{2} F f = \frac{1}{2}\frac{F^2}{K} = \frac{1}{2} M_t \varphi = \frac{1}{2}\frac{M_t^2}{K_T}$

$= \frac{1}{2}\frac{F^2}{K} = \frac{1}{2}\left(\frac{FD}{2}\right)^2 \frac{l}{G J_P} \longrightarrow$

$\Rightarrow K = \frac{4 G J_P}{D^2 l} = \frac{4 G \pi d^4}{8 D^2 \pi D i} = \frac{G d^4}{64 R^3 i}$